広島経済大学経済研究論集
第23巻第2号　2000年9月

家計の選好パラメータ
——同時点間と異時点間の代替の弾力性——

中　嶋　則　夫*

は　じ　め　に

ライフサイクル仮説の重要な含意は，個人の消費支出が生涯の予算制約と密接に関係していることである。従って，生涯の予算制約が変化しない限り消費支出は，個人の選好に依存して決定されることになり，毎期毎期の所得の変動から個人の消費支出は影響を受けないことになる。このような観点から，ライフサイクル仮説が成立する場合，短期的な経済安定政策である，マクロ財政政策の効果が意味を持たなくなるのである。このような意味において，日本の家計がライフサイクル仮説に従っているのかどうかについて，統計的に検証することは，政府の行う総需要管理政策の有効性を評価する意味において重要なことであると言えよう。

Japelli and Pagano（1989）は，消費支出が可処分所得に，より敏感に反応するという Flavin（1981）や Hayashi（1982）等の実証分析結果とその結果に対する Hall（1978）や Hayashi（1982）の解釈に基づき，分析を行った結果，流動性制約が，その原因であると主張している。この Hall（1978）や Hayashi（1982）の解釈とは，経済に2つの特性を持つグループが存在し，一方はライフサイクル仮説に従うグループで，他方は，消費支出が可処分所得に依存するグループであること，そして，後者のグループの存在が，消費支出が可処分所得に対して，より敏感に反応するという結果を生じさせたというものである。ここで言う消費支出が可処分所得の変化に依存するグループとは，流動性制約に直面し，そのために最適な消費支出に必要な借り入れができないようなグループのことである。

以上の議論を要約すれば，次のように言えるであろう。つまり，ライフサイクル仮設が成立しているならば，消費支出の説明変数に可処分所得が含まれず，消費支

* 広島経済大学経済学部講師

出は自己回帰型のモデルとして表現されるはずである。しかし，流動性制約に直面している家計の存在により，消費支出が可処分所得の変動から影響を受けるようになり，従って，そのことがライフサイクル仮説の不成立に結びついていると言う主張である。

さて，これに対して，Auerback and Kotlikoff（1987）のモデルは，所得に関する項が消費支出を説明したり，利子率に関する項が消費支出を説明したりするモデルとして定式化されている。このモデルによれば，Japelli and Pagano（1989）の議論で示された，流動性制約の存在のためにライフサイクル仮説が成立しないと言う点と異なる結論を導きだすことになる。このような違いが生じるのも，Auerback and Kotlikoff（1987）のモデルが特に，個人の資源配分に関する選好体系を考慮していて，かつ，余暇の選択に関係する項を含んでいるからである。つまり，家計が余暇の選択を行うよう行動する点と，家計の選好のパラメータの値の大きさの2点に依存して，消費支出の説明変数が決まることを想定しているモデルとなっているのである。従って，このモデルを用いれば，消費支出の説明変数として，所得に関する項や利子率に関する項が登場することになり，その場合でもライフサイクル仮説の成立と何ら矛盾しないことになる。

Auerback and Kotlikoff（1987）のモデルを用いた分析結果から言えることは，所得に関係する項と利子率に関係する項のどちらが消費支出に影響をもつ説明変数となるかは，選好のパラメータの値の大小関係が重要な役割を果しているということである。

このような結果を導く過程を明らかにするため，本稿では，第1に Auerback and Kotlikoff（1987）を参考にモデルの設定を行い，家計の行動を定式化する。そのモデルから最適解の導出を行い，その後，その最適解を参考にして，家計の選好パラメータの値の大小関係を特定するための考察を行う。そして，最後にまとめを行い，本稿で残された課題について述べることにする。

1　3期間モデルの構築

まず，3期間生存する家計を想定して，3期間ライフサイクルモデルの構築を行う。この3期間モデルに登場する家計は，第1期と第2期に労働を供給し，第3期には退職することとする。そして，この家計は，同時点間と異時点間に関する選好を有しており，モデルの外から賃金率と利子率が与えられると，家計はそれに対応し労働供給と資産を決定する。これに加え，本モデルでは，家計の完全予見が仮定されている。このような基本的前提に従い，家計の生涯にわたる効用最大化問題の

解を以下に示す。

1.1 家計の行動の定式化

ここでは，まず家計の効用関数を定義し，生涯にわたる効用最大化問題の解を求めることにする。Auerbach and Kotlikoff（1987）が定義した関数と同様に，ある t 期の効用 u_t は消費支出と余暇率から得るとする。以下の効用関数では，c_t が t 期の消費支出を表し，l_t は余暇率，α は余暇選好パラメータ，ρ は同時点間の代替の弾力性を示している。(1)

$$u_t = \left(c_t^{1-\frac{1}{\rho}} + \alpha l_t^{1-\frac{1}{\rho}} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}} \tag{1}$$

そして，生涯効用 U を以下のように定義する。但し，以下の生涯効用を示す関数に登場する 2 つのパラメーター δ と γ はそれぞれ時間選好率，異時点間の代替の弾力性を表している。(2)

$$U = \frac{1}{1-\dfrac{1}{\gamma}} \sum_{t=1}^{3} \left(\frac{1}{(1+\delta)} \right)^{(t-1)} (u_t)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \tag{2}$$

また，家計は，毎期以下のような予算制約式に従っている。ここで，A_{t+1} は，t+1 期首の資産を表し，r_t は t 期の利子率，$t_{r,t}$ は t 期の利子所得税率，$t_{w,t}$ は t 期の勤労所得税率，w_t は t 期の賃金率，e_t は労働効率，(3) $t_{b,t}$ は t 期の年金所得税率，b_t は t 期に政府から受取る年金受給額，$t_{c,t}$ は t 期の消費税率である。

$$A_{t+1} = (1+r_t(1-t_{r,t}))A_t + (1-t_{w,t})w_t e_t(1-l_t) + (1-t_{b,t})b_t - (1+t_{c,t})c_t \tag{3}$$

この式は，来期の期首の資産は，今期の期首資産，所得，年金受け取りの和から，今期の消費支出を差し引いた額であることを意味する。また，この制約式に登場する年金は，政府から支給される。そして，その年金受給額 b は，ある家計の平均労働効率 $e_{avg.}$ の一定割合 ψ に決められているものとする。この関係を式として表すならば，年金受給額は以下のようになる。

$$b_t = w_t \psi e_{avg.} \tag{4}$$

1.2 最適解の導出

以上に示した，同時点間の効用関数と生涯効用を表す関数，さらに制約条件から，

問題を次のように定式化する。

$$max \quad U=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\gamma}}\sum_{t=1}^{3}\left(\frac{1}{(1+\delta)}\right)^{(t-1)}\left(u_t(c_t,\ l_t)\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \tag{5}$$

$$s.t. \quad A_{t+1}=(1+r_t(1-t_{r,t}))A_t+(1-t_{w,t})w_t e_t(1-l_t)+(1-t_{b,t})b_t-(1+t_{c,t})c_t \tag{6}$$

ラグランジュ関数は以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} L \ &=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\gamma}}\sum_{t=1}^{3}\left(\frac{1}{(1+\delta)}\right)^{(t-1)}\left(u_t(c_t,\ l_t)\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \\ &+\sum_{t=1}^{3}\lambda_t\left\{\left(1+r_t\left(1-t_{r,\ t}\right)\right)A_t-A_{t+1}+\left(1-t_{w,\ t}\right)w_t e_t\left(1-l_t\right)+\left(1-t_{b,\ t}\right)b_t-\left(1+t_{c,\ t}\right)c_t\right\} \\ &+\lambda_0\left(\overline{A}_1-A_1\right) \end{aligned} \tag{7}$$

但し，$A_1=A_4=0$ である。$A_1=A_4=0$ とは，家計は経済主体として登場するときと，生涯を閉じるときには資産が 0 の状態であることを表している。
以上の式から最適解の一階の条件は以下に示す通りである。

$$L_{c_t}=\left\{\frac{1}{(1+\delta)}\right\}^{(t-1)}u_t^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\partial u_t}{\partial c_t}-\lambda_t\left(1+t_{c,\ t}\right)=0 \tag{8}$$

$$L_{l_t}=\left\{\frac{1}{(1+\delta)}\right\}^{(t-1)}u_t^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\partial u_t}{\partial l_t}-\lambda_t\left(1-t_{w,\ t}\right)w_t e_t=0 \tag{9}$$

$$L_{A_t}=\left(1+r_t\left(1-t_{r,\ t}\right)\right)\lambda_t-\lambda_{t-1}=0 \tag{10}$$

$$L_{\lambda_t}=\left(1+r_t\left(1-t_{r,\ t}\right)\right)A_t-A_{t+1}+\left(1-t_{w,\ t}\right)w_t e_t\left(1-l_t\right)+\left(1-t_{b,\ t}\right)b_t-\left(1+t_{c,\ t}\right)c_t=0 \tag{11}$$

式(8)，式(9)，式(10)，式(11)を用い，同時点の余暇率と消費支出の関係，異時点間の消費支出の関係，初期消費支出が導出される。以下にその最適解を示すことにする。

1.3 最適解の検討

1.3.1 消費支出と余暇率の関係式

以下が消費支出と余暇率を決定する式になる。α は余暇選好のパラメータ，ρ は同時点間の代替の弾力性である。

$$l_t=\left(\frac{\alpha\left(1+t_{c,\,t}\right)}{\left(1-t_{w,\,t}\right)w_t e_t}\right)^{\rho}c_t \tag{12}$$

上記の消費支出と余暇率の関係式から読み取れることを示すことにする。但し，ここでは，c_t が一定である場合の効果を考えている。(4)

1. 消費税率 t_c が引き上げられると，余暇率は増加する。従って，労働供給は減少する。
2. 勤労所得税率 t_w が引き上げられると，余暇率は増加する。消費税率の場合と同様，労働供給は減少する。
3. $\left(1+t_{c,\,t}\right)=\dfrac{1}{\left(1-t_{w,\,t}\right)}$ となるように，税率を変更した場合，消費税も勤労所得税も同じ効果を余暇率に与えることになる。余暇率に同じ効果を与える税率は，$t_{c,\,t}=\dfrac{t_w}{\left(1-t_{w,\,t}\right)}$ の関係を満たすように設定するれば良い。
4. 賃金率 w が上昇すると，余暇率は減少する。従って，労働供給は，増加する。

1.3.2.　異時点間の消費支出の関係式

異時点間の消費支出の関係を表した式は以下の通りに導出された。ここでも余暇率と消費支出の関係のときと同様，c_{t-1} が一定として議論をすることにする。

$$c_t=\left(\frac{\left(1+r_t\left(1-t_{r,\,t}\right)\right)\left(1+t_{c,\,t-1}\right)}{\left(1+\delta\right)\left(1+t_{c,\,t}\right)}\right)^{\gamma}\left(\frac{\left(1+\alpha\left[\dfrac{\alpha\left(1+t_{c,\,t}\right)}{\left(1-t_{w,\,t}\right)w_t e_t}\right]^{\rho-1}\right)}{\left(1+\alpha\left[\dfrac{\alpha\left(1+t_{c,\,t-1}\right)}{\left(1-t_{w,\,t-1}\right)w_{t-1}e_{t-1}}\right]^{\rho-1}\right)}\right)^{\frac{(\gamma-\rho)}{(\rho-1)}}c_{t-1} \tag{13}$$

上記の最適消費支出経路 c_{t-1} に係る係数は，２つの部分に分けることができる。前半部分で指数部分を除く箇所を第１係数，同様に後半部分の指数部分を除く箇所を第２係数と呼ぶことにする。従って，$\left(\dfrac{\left(1+r_t\left(1-t_{r,\,t}\right)\right)\left(1+t_{c,\,t-1}\right)}{\left(1+\delta\right)\left(1+t_{c,\,t}\right)}\right)$ が第１係数であり，$\left(\dfrac{\left(1+\alpha\left[\dfrac{\alpha\left(1+t_{c,\,t}\right)}{\left(1-t_{w,\,t}\right)w_t e_t}\right]^{\rho-1}\right)}{\left(1+\alpha\left[\dfrac{\alpha\left(1+t_{c,\,t-1}\right)}{\left(1-t_{w,\,t-1}\right)w_{t-1}e_{t-1}}\right]^{\rho-1}\right)}\right)$ が第２係数となる。それでは，上記の式から見

て取れる点を以下に示すことにする。

1. 第1係数が1よりも大きい場合について考える。第1係数が1よりも大きいと言う関係は，分子である課税後の利子率が，分母である時間選好率 δ よりも大きいことを表している。この場合，異時点間の代替の弾力性 γ が正の値を取り，γ の値が大きくなることは，今期消費支出の第1係数から受ける影響が大きくなることを意味する。
2. 第1係数が1に等しい場合を考える。第1係数が1に等しいと言う関係は，分子である課税後の利子率と，分母である時間選好率 δ が同じ値であることを表している。第1係数が1に等しくなるようなことが起こるのは，常に変動する利子率と時間選好率 δ が同様な動きをする場合(5)と，利子率と時間選好率 δ との大小関係とは無関係に，異時点間の代替の弾力性 γ の値が0となる場合(6)に限られる。このように，時間選好率 δ が利子率と同じような動きをすることで，第1係数の取る値が1になる場合か，または異時点間の代替の弾力性 γ が0に近い値を取る場合，第1係数は今期消費支出に影響を与えにくくなる。
3. 引き続き第2係数についてみていく。第2係数は，概して考えれば勤労所得が消費支出に与える影響を反映した部分と見なすことができる。そして，第2係数では，異時点間の代替の弾力性 γ と同時点間の代替の弾力性 ρ の大小関係が重要なポイントになっている。ここで，今期の勤労所得が前期に比べて多くなったと想定し議論を進めることにする。一般に，勤労所得が増えれば，消費支出に正の影響を与えることは多くの実証研究が示している。従って，実証研究との整合性を保つためにも，今期勤労所得が前期勤労所得よりも大きい場合，その大小関係を今期消費支出に反映させるためには，第2係数の分母より分子がより大きな値を取る必要がある。

   ここで，同時点間の代替の弾力性 ρ の値について，2通りの大小関係が考えられるが，はじめに $\rho-1<0$ となることを仮定して議論を進めることにする。同時点間の代替の弾力性 ρ がこのような大小関係を満たしている値である時，今期勤労所得の増加が，消費支出へ正の影響を与えるためには，$\gamma-\rho<0$ である必要がある。

   以上の議論から，同時点間の代替の弾力性 ρ が $\rho-1<0$ であると仮定した場合の同時点間の代替の弾力性 ρ と異時点間の代替の弾力性 γ との大小関係は，$\gamma<\rho<1$ となる。
4. 先の同時点間の代替の弾力性 ρ の値に対して，その大小関係が $\rho-1>0$ であ

る場合を仮定して議論を行う。このような仮定のもと，今期勤労所得増加が今期消費支出に正の影響を与えるには，$\gamma<\rho$ となる必要がある。この異時点間の代替の弾力性 γ と同時点間の代替の弾力性 ρ の大小関係は，ρ の大小関係が $\rho-1<0$ である場合でも，$\rho-1>0$ である場合であっても，$\gamma>\rho$ という関係を維持することになる。

5. 続いて，同時点間の代替の弾力性 ρ と異時点間の代替の弾力性 γ との差について見て行くことにする。先に，両パラメータの大小関係は示されているので，同時点間の代替の弾力性 ρ をある値に固定し，$\rho=\rho$ として議論をすることにする。

ここで，同時点間の代替の弾力性 ρ と異時点間の代替の弾力性 γ が同じ値（$\rho=\gamma$）であったとすると，今期の消費支出は第 2 係数から全く影響を受けなくなる。これは，今期の消費支出が利子率に関係する係数の影響を大きく受けるようになり，所得に関係する係数からの影響を受けなくなることを意味する。また，異時点間の代替の弾力性 γ が $\gamma=0$ であった場合，同時点間の代替の弾力性 ρ と異時点間の代替の弾力性 γ が同じ値（$\rho=\gamma$）である場合とは逆に，所得に関係する係数からの影響を大きく受けるようになり，利子率に関係する係数からの影響を受けなくなる。

2　まとめと今後の課題

以上では，今期余暇率と今期消費支出の関係や今期消費支出と選好のパラメーターの大小関係について検討を加えてきた。その中でも特に，選好パラメータと今期消費支出に関する考察結果から，次のような点を指摘することができた。

第 1 に，異時点間の消費支出に関する関係式の議論で，同時点間の代替の弾力性 ρ と異時点間の代替の弾力性 γ との大小関係は，$\gamma<\rho$ であることが論理的に導かれた。つまり，同時点間の代替の弾力性 ρ が具体的にどのくらいの値になるのかが明らかにされれば，異時点間の代替の弾力性 γ の大きさの上限が決定される点が示されたことになる。

第 2 として，同時点間の代替の弾力性 ρ と異時点間の代替の弾力性 γ との差が大きい場合，今期消費支出は，所得に関係する係数から影響を大きく受けるようになる。また，両パラメータの大きさに差がないような場合，今期消費支出は所得に関係する係数からの影響をほとんど受けなくなる。つまり，利子率に関係する係数から影響を受けるようになると言える。

以上の 2 点から，家計の選好パラメータである，同時点間の代替の弾力性 ρ と

異時点間の代替の弾力性 γ の大小関係により，今期消費支出を説明する変数が異なる場合があり得ることを示しており，場合によっては，所得に関する変数が消費を説明する要因に含まれることを意味する。これは，ライフサイクル仮説が成立すれば，所得が消費支出の説明変数に含まれないと指摘するライフサイクル仮説の主張点と異なる部分である。

今後は，家計の選好パラメーターの特定化を行い，同時点間の代替の弾力性 ρ と異時点間の代替の弾力性 γ の大小関係が，データーにより理論通りに支持されるのか，また，具体的にはどのような値になるのかを推計する必要がある。このような点を今後の課題としたい。

付録

A　3期間モデルの構築と最適解の導出

ここでは，3期間モデルにおける家計の最適な行動を表す最適解の導出と導出過程を示す。このモデルに登場する家計は，第1期と第2期に労働を供給し第3期には退職し働かないものとする。

A.1　家計（3期間モデル）

ここでは，まず家計の効用関数を定義し，生涯にわたる効用最大化問題の解を求めることにする。Auerbach and Kotlikoff（1987）と同様に，毎期 u_t の効用は消費と余暇率から得るとする。但し，c_t は t 期の消費，l_t は余暇率，α は余暇率への集約度，ρ 同時点の代替の弾力性を示している。

$$u_t = \left(c_t^{1-\frac{1}{\rho}} + \alpha l_t^{1-\frac{1}{\rho}} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}} \tag{14}$$

そして，生涯効用 U は以下のように表すことができる。但し，δ は時間選好率，γ は異時点間の代替の弾力性を表している。

$$U = \frac{1}{1-\dfrac{1}{\gamma}} \sum_{t=1}^{3} \left(\frac{1}{(1+\delta)} \right)^{(t-1)} (u_t)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \tag{15}$$

また，家計は，毎期以下のような予算制約式に従っている。但し，A_{t+1} は，$t+1$ 期首の資産を表し，r_t は t 期の利子率，$t_{r,t}$ は t 期の利子所得税率，$t_{w,t}$ は t 期の勤労所得税率，w_t は t 期の賃金率，e_t は労働効率，$t_{b,t}$ は t 期の年金所得税率，b_t は t 期に政府から受取る年金受給額，$t_{c,t}$ は t 期の消費税率である。

$$A_{t+1} = (1+r_t(1-t_{r,t}))A_t + (1-t_{w,t})w_t e_t(1-l_t) + (1-t_{b,t})b_t - (1+t_{c,t})c_t \tag{16}$$

年金は政府から支給されるが，年金受給額 b は，平均労働効率 $e_{avg.}$ の一定割合 ψ とする。従って，年金受給額は以下の式で表される。

$$b_t = w_t \psi e_{avg.} \tag{17}$$

以上から，問題を次のように定式化できる。

$$max \quad U = \frac{1}{1-\dfrac{1}{\gamma}} \sum_{t=1}^{3} \left(\frac{1}{(1+\delta)} \right)^{(t-1)} \left(u_t(c_t,\ l_t)\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \tag{18}$$

$$s.t.\quad A_{t+1}=(1+r_t(1-t_{r,t}))A_t+(1-t_{w,t})w_te_t(1-l_t)+(1-t_{b,t})b_t-(1+t_{c,t})c_t \tag{19}$$

ラグランジュ関数は以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{1-\dfrac{1}{\gamma}}\sum_{t=1}^{3}\left(\frac{1}{(1+\delta)}\right)^{(t-1)}\left(u_t(c_t,\ l_t)\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \\ &+\sum_{t=1}^{3}\lambda_t\left\{\left(1+r_t\left(1-t_{r,\ t}\right)\right)A_t-A_{t+1}+\left(1-t_{w,\ t}\right)w_te_t\left(1-l_t\right)+\left(1-t_{b,\ t}\right)b_t-\left(1+t_{c,\ t}\right)c_t\right\} \\ &+\lambda_0\left(\overline{A}_1-A_1\right) \end{aligned} \tag{20}$$

但し，$A_0=A_4=0$ である。

以上の式から最適解の一階の条件は以下のように導かれる。

$$L_{c_t}=\left\{\frac{1}{(1+\delta)}\right\}^{(t-1)}u_t^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\partial u_t}{\partial c_t}-\lambda_t\left(1+t_{c,\ t}\right)=0 \tag{21}$$

$$L_{l_t}=\left\{\frac{1}{(1+\delta)}\right\}^{(t-1)}u_t^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\partial u_t}{\partial l_t}-\lambda_t\left(1-t_{w,\ t}\right)w_te_t=0 \tag{22}$$

$$L_{A_t}=\left(1+r_t\left(1-t_{r,\ t}\right)\right)\lambda_t-\lambda_{t-1}=0 \tag{23}$$

$$L_{\lambda_t}=\left(1+r_t\left(1-t_{r,\ t}\right)\right)A_t-A_{t+1}+\left(1-t_{w,\ t}\right)w_te_t\left(1-l_t\right)+\left(1-t_{b,\ t}\right)b_t-\left(1+t_{c,\ t}\right)c_t=0 \tag{24}$$

A．2　最適余暇率と最適消費支出

最適解の１階の条件である，式(21)，式(22)を変形することにより，以下の式を得る。

$$\frac{1}{\left(1-t_{w,\ t}\right)w_te_t}\frac{\partial u_t}{\partial l_t}=\lambda_t\left\{(1+\delta)\right\}^{(t-1)}u_t^{\frac{1}{\gamma}} \tag{25}$$

$$\frac{1}{\left(1+t_{c,\ t}\right)}\frac{\partial u_t}{\partial c_t}=\lambda_t\left\{(1+\delta)\right\}^{(t-1)}u_t^{\frac{1}{\gamma}} \tag{26}$$

但し，$\dfrac{\partial u_t}{\partial c_t}=u_t^{\frac{1}{\rho}}c_t^{-\frac{1}{\rho}}$，$\dfrac{\partial u_t}{\partial l_t}=u_t^{\frac{1}{\rho}}\alpha l_t^{-\frac{1}{\rho}}$ である。

従って，上式を変形すると次のようになる。

$$\frac{1}{(1-t_{w,\,t})w_t e_t} u_t^{\frac{1}{\rho}} \alpha l_t^{-\frac{1}{\rho}} = \frac{1}{(1+t_{c,\,t})} u_t^{\frac{1}{\rho}} c_t^{-\frac{1}{\rho}} \tag{27}$$

$$l_t^{-\frac{1}{\rho}} = \left(\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_t e_t} \right)^{-1} c_t^{-\frac{1}{\rho}} \tag{28}$$

このように示される式の両辺を $-\rho$ 乗すると次のように，最適消費支出と最適余暇率の関係式を導出できる。

$$l_t = \left(\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_t e_t} \right)^{\rho} c_t \tag{29}$$

A．3　異時点間の最適消費支出

式(23)より $(1+r_t(1-t_{r,\,t}))\lambda_t = \lambda_{t-1}$ が得られる。また，式(21)から，次式が導かれる。

$$\left\{ \frac{1}{(1+\delta)} \right\}^{(t-1)} u_t^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{\partial u_t}{\partial c_t} = \lambda_t (1+t_{c,\,t}) \tag{30}$$

$$\left\{ \frac{1}{(1+\delta)} \right\}^{(t-2)} u_{t-1}^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{\partial u_{t-1}}{\partial c_{t-1}} = \lambda_{t-1}(1+t_{c,\,t-1}) = (1+t_{c,\,t-1})(1+r_t(1-t_{r,\,t}))\lambda_t \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \left\{ \frac{1}{(1+\delta)} \right\}^{(t-1)} \frac{1}{(1+t_{c,\,t})} u_t^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{\partial u_t}{\partial c_t} \\ &= \left\{ \frac{1}{(1+\delta)} \right\}^{(t-2)} \frac{1}{(1+t_{c,\,t-1})(1+r_t(1-t_{t,\,t}))} u_{t-1}^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{\partial u_{t-1}}{\partial c_{t-1}} \end{aligned} \tag{32}$$

但し，$\frac{\partial u_t}{\partial c_t} = u_t^{\frac{1}{\rho}} c_t^{-\frac{1}{\rho}}$ を用いるならば，以下のように書き直せる。

$$\left\{ \frac{1}{(1+\delta)} \right\}^{(t-1)} \frac{1}{(1+t_{c,\,t})} u_t^{-\frac{1}{\gamma}} u_t^{\frac{1}{\rho}} c_t^{-\frac{1}{\rho}} = \left\{ \frac{1}{(1+\delta)} \right\}^{(t-2)} \frac{1}{(1+t_{c,\,t-1})(1+r_t(1-t_{r,\,t}))} u_{t-1}^{-\frac{1}{\gamma}} u_{t-1}^{\frac{1}{\rho}} c_{t-1}^{-\frac{1}{\rho}} \tag{33}$$

従って，異時点間の消費支出である c_t と c_{t-1} の関係は以下のように導ける。

$$c_t^{-\frac{1}{\rho}} = \left(\frac{(1+\delta)(1+t_{c,\,t})}{(1+r_t(1-t_{r,\,t}))(1+t_{c,\,t-1})} \right)^{-\rho} u_t^{-\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\gamma}\right)} u_{t-1}^{\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\gamma}\right)} c_{t-1}^{-\frac{1}{\rho}} \tag{34}$$

両辺を$-\rho$乗すると以下を得る。

$$c_t = \left(\frac{(1+\delta)(1+t_{c,\,t})}{(1+r_t(1-t_{r,\,t}))(1+t_{c,\,t-1})} \right)^{-\rho} \left(\frac{u_t}{u_{t-1}} \right)^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} c_{t-1} \tag{35}$$

また，$(u_t)^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}}$ は，$l_t = \left(\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_t e_t} \right)^{\rho} c_t$ の関係を用いて以下のように表せる。

$$(u_t)^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} = \left(\left(c_t^{1-\frac{1}{\rho}} + \alpha l_t^{1-\frac{1}{\rho}} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}} \right)^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} \tag{36}$$

$$= \left(c_t \left(1+\alpha \left(\frac{l_t}{c_t} \right)^{1-\frac{1}{\rho}} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}} \right)^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} \tag{37}$$

$$= \left(c_t \left(1+\alpha \left(\frac{\left(\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_t e_t} \right)^{\rho} c_t}{c_t} \right)^{1-\frac{1}{\rho}} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}} \right)^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} \tag{38}$$

$$= \left(c_t \left(1+\alpha \left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_t e_t} \right]^{\rho-1} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} \tag{39}$$

$$= c_t^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} \left(1+\alpha \left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_t e_t} \right]^{\rho-1} \right)^{\frac{\rho(\gamma-\rho)}{(\rho-1)\gamma}} \tag{40}$$

$$\left(\frac{u_t}{u_{t-1}} \right)^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} = \frac{c_t^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} \left(1+\alpha \left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_t e_t} \right]^{\rho-1} \right)^{\frac{\rho(\gamma-\rho)}{(\rho-1)\gamma}}}{c_{t-1}^{\frac{\gamma-\rho}{\gamma}} \left(1+\alpha \left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t-1})}{(1-t_{w,\,t-1})w_{t-1} e_{t-1}} \right]^{\rho-1} \right)^{\frac{\rho(\gamma-\rho)}{(\rho-1)\gamma}}} \tag{41}$$

式(41)を式(35)に代入し，更に消費支出 c に関して整理すると，以下のように異時点間の最適な消費支出の関係式が導出される。

$$c_t^{1-\frac{\gamma-\rho}{\gamma}}=\left(\frac{(1+\delta)(1+t_{c,\,t})}{\left(1+r_t(1-t_{r,\,t})\right)(1+t_{c,\,t-1})}\right)^{-\rho}\frac{\left(1+\alpha\left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_te_t}\right]^{\rho-1}\right)^{\frac{\rho(\gamma-\rho)}{(\rho-1)\gamma}}}{\left(1+\alpha\left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t-1})}{(1-t_{w,\,t-1})w_{t-1}e_{t-1}}\right]^{\rho-1}\right)^{\frac{\rho(\gamma-\rho)}{(\rho-1)\gamma}}}c_{t-1}^{1-\frac{\gamma-\rho}{\gamma}}$$

$$c_t^{\frac{\rho}{\gamma}\frac{\gamma}{\rho}}=\left(\frac{(1+\delta)(1+t_{c,\,t})}{\left(1+r_t(1-t_{r,\,t})\right)(1+t_{c,\,t-1})}\right)^{-\rho\frac{\gamma}{\rho}}\frac{\left(1+\alpha\left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_te_t}\right]^{\rho-1}\right)^{\frac{\gamma}{\rho}\frac{\rho(\gamma-\rho)}{\rho(\rho-1)\gamma}}}{\left(1+\alpha\left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t-1})}{(1-t_{w,\,t-1})w_{t-1}e_{t-1}}\right]^{\rho-1}\right)^{\frac{\gamma}{\rho}\frac{\rho(\gamma-\rho)}{\rho(\rho-1)\gamma}}}c_{t-1}^{\frac{\rho}{\gamma}\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$c_t=\left(\frac{\left(1+r_t(1-t_{r,\,t})\right)(1+t_{c,\,t-1})}{(1+\delta)(1+t_{c,\,t})}\right)^{\gamma}\left(\frac{\left(1+\alpha\left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_te_t}\right]^{\rho-1}\right)}{\left(1+\alpha\left[\frac{\alpha(1+t_{c,\,t-1})}{(1-t_{w,\,t-1})w_{t-1}e_{t-1}}\right]^{\rho-1}\right)}\right)^{\frac{(\gamma-\rho)}{(\rho-1)}}c_{t-1} \tag{42}$$

$\sigma_t=\left(1+\alpha^{\rho}\left[\frac{(1+t_{c,\,t})}{(1-t_{w,\,t})w_te_t}\right]^{\rho-1}\right)^{\frac{(\gamma-\rho)}{(\rho-1)}}$ とすると，$t-1$ 期に経済主体として登場した世代の消費の最適経路は以下で与えられる。

$$c_t=\left(\frac{\left(1+r_t(1-t_{r,\,t})\right)}{(1+\delta)}\right)^{\gamma}\left(\frac{(1+t_{c_{t-1}})}{(1+t_{c_t})}\right)^{\gamma}\frac{\sigma_t}{\sigma_{t-1}}c_{t-1} \tag{43}$$

注

(1) 同時点間の消費支出 c と余暇率 l との代替の弾力性は，次のように定義される。

$$-\frac{d(l/c)/(l/c)}{d(p_l/p_c)/(p_l/p_c)}$$

但し，効用関数が1次同次であるから上記の式は，次のように書き直せる。

$$\frac{u_{t,c}u_{t,l}}{u_t u_{t,c,l}}$$

ここで $u_{t,c}$, $u_{t,l}$, $u_{t,c,l}$ はそれぞれ以下のように導出される。

$$u_{t,c}=\left(c_t^{1-\frac{1}{\rho}}+\alpha l_t^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}-1}c_t^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$u_{t,l}=\left(c_t^{1-\frac{1}{\rho}}+\alpha l_t^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}-1}\alpha l_t^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$u_{t,c,l}=\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(c_t^{1-\frac{1}{\rho}}+\alpha l_t^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}-2}c_t^{-\frac{1}{\rho}}\alpha l_t^{-\frac{1}{\rho}}$$

従って，上記の関係を整理すると，同時点間の代替の弾力性は以下のように示される。

$$\frac{u_{t,c}u_{t,l}}{u_t u_{t,c,l}}=\rho$$

ここで同時点間の代替の弾力性 ρ について見ておく。

$$\rho=\frac{d(l/c)/(l/c)}{d(p_l/p_c)/(p_l/p_c)}=\frac{\dot{l}-\dot{c}}{\dot{p}_l-\dot{p}_c}$$

この関係式が示しているように，相対価格の変化率を1％とした場合，余暇率の変化率から消費支出の変化率を引いた値がこの同時点間の代替の弾力性 ρ ％に等しくなることを意味する。

(2) 生涯効用 U は，u_t のように1次同次関数ではないので，定義に従って，異時点間の代替の弾力性 γ を示すことにする。定義は以下である。

$$-\frac{d\left(u_{t+1}/u_t\right)}{u_{t+1}/u_t}\Big/\frac{d\left(U_{u_{t+1}}/U_{u_t}\right)}{U_{u_{t+1}}/U_{u_t}}$$

ここで $U_{u_t}=(1+\delta)^{-(t-1)}u_t^{-\frac{1}{\gamma}}$， $U_{u_{t+1}}=(1+\delta)^{-(t)}u_{t+1}^{-\frac{1}{\gamma}}$ となる。従って，$U_{u_{t+1}}/U_{u_t}=(1+\delta)^{-(1)}\left(\frac{u_{t+1}}{u_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$ と $d\left(U_{u_{t+1}}/U_{u_t}\right)=-\frac{1}{\gamma}(1+\delta)^{-(1)}\left(\frac{u_{t+1}}{u_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1}d\left(\frac{u_{t+1}}{u_t}\right)$ を得る。異時点間の代替の弾力性 γ は以下のように示される。

$$\gamma=-\frac{d(u_{t+1}/u_t)}{u_{t+1}/u_t}\Big/\frac{d(U_{u_{t+1}}/U_{u_t})}{U_{u_{t+1}}/U_{u_t}}=-\frac{d(u_{t+1}/u_t)}{u_{t+1}/u_t}\Big/\frac{-\frac{1}{\gamma}(1+\delta)^{-(1)}\left(\frac{u_{t+1}}{u_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1}d\left(\frac{u_{t+1}}{u_t}\right)}{(1+\delta)^{-(1)}\left(\frac{u_{t+1}}{u_t}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}$$

ここでも，同時点間の代替の弾力性のように示すことができる。

$$\gamma=-\frac{\dot{u}_{t+1}-\dot{u}_t}{\dot{U}_{u_{t+1}}-\dot{U}_{u_t}}$$

従って，γ が大きい場合，異時点間の資源配分を柔軟に行う選好を表すことになる。

(3) 世代重複モデルにおいて，家計の所得を決定するのに重要な変数として労働の効率性 e_t がある。ここで労働効率が1である経済主体が1時間労働を提供して，その金銭的な対価として1（千円/時間）を賃金受け取るとすると，同じ労働供給を行って w（千円/時間）の賃金を受け取った経済主体は異なる労働効率を持っていると考えることができる。そして，その経済主体の持つ労働効率 e_t とは，次のようにして求められる。まず，効率の違いから，賃金率の違いが生じるので，以下の式により効率の違いを記述できる。

$e_t\times 1$（千円/時間）$=w$（千円/時間）

上式を e_t について解くと，$e_t=w$ という労働の効率性が導けたことになる。但し，この労働の効率性は計算式から見て取れるように無名数であり単位は無い。つまり，この値は1時間あたりの労働の質を表しているものと解釈できる。

余暇時間の賦存量を1時間とし，余暇率を l とするならば，労働時間は1時間×$(1-l)$ で表される。労働効率が e である家計は，この労働時間の評価が1時間×$(1-l)\times e$ となり，労働の対価としての賃金は1時間×$(1-l)\times e\times w$（千円/時間）となる。

(4) c_t は賃金率や利子率の関数となっていて，賃金率や利子率は労働供給と密接に関係していると考えられる。そのために，ここで挙げた，消費税率，勤労所得税率，賃金率の変化が余暇率に与える効果は，完全に調整が終了した結果を示しているものではない。したがって，ここに示した効果は，部分均衡的効果を述べたに過ぎない。

(5) この場合，利子率と時間選好率が同じ値をとることを意味し，時間選好率 δ は利子率に何らかの影響を与えられる内生変数の可能性があることを示している。

(6) 異時点間の代替の弾力性 γ が0という値を取る場合も，利子率の変動が消費支出に影響を与えなくなる。

参考文献

〔1〕井堀利宏（1996），『公共経済の理論』，有斐閣

〔2〕上村敏之（1997），「ライフサイクル消費行動と効用関数の推計—異時点間消費の弾力性と時間選好率—」，産研論集（関西学院大学）24号

〔3〕小川一夫，玉岡雅之，得津一郎（1994），『マクロ経済学』，有斐閣

〔4〕岡本　章（1996），「所得分布と高齢化社会の税制改革」，理論計量経済学会1996年度大会報告

〔5〕岡本　章（1995），「労働の異質性と高齢化社会における税制改革—累進税制の選択と資産格差への影響—」，帝塚山大学ディスカッションペーパー No. J－073

〔6〕橘木俊詔，下野恵子（1994），『個人貯蓄とライフサイクル』，日本経済新聞社
〔7〕成田淳司（1991），「コーホートデーターによる消費のライフサイクル仮説の検証」『季刊理論経済学』第42巻第1号
〔8〕中嶋則夫（1996），「所得税と家計の消費行動」，修士論文（広島大学社会科学研究科）
〔9〕中嶋則夫（1997），「所得税の累進性と消費税—税収中立下での政策効果—」，広島大学経済学研究
〔10〕西村和雄（1994），『ミクロ経済学』，東洋経済新報社
〔11〕八田達夫（1989），「最適課税理論と税制改革論争」，『応用ミクロ経済学』伊藤元重，西村和雄編，東京大学出版
〔12〕橋本恭之，林 宏昭，跡田直澄（1991）「人口高齢化と税・年金制度—コーホートデータによる制度改革の影響分析—」，経済研究，第42巻第4号
〔13〕林 宜嗣（1994），「世代間の公平性と税制改革」，経済学論究，第48巻第3号
〔14〕本間正明，跡田直澄，岩本康志，大竹文雄（1987），「ライフサイクル成長モデルによるシミュレーション分析—パラミーターの推定と感応度分析—」，大阪大学経済学
〔15〕本間正明，跡田直澄，岩本康志，大竹文雄（1989），「年金：高齢化社会と年金制度」，浜田宏一，黒田昌裕，堀内昭義編『日本経済のマクロ分析』第6章，東京大学出版会
〔16〕本間正明，跡田直澄（1989），『税制改革の実証分析』，東洋経済新報社
〔17〕伴 金美（1991），『マクロ計量分析』，有斐閣
〔18〕Auerbach, Alan J. , Laurence J. Kotlikoff, Jonathan Skinner (1983), "The efficiency gains from dynamic tax reform", *International Economic Review*, Vol. 24, No. 1, pp. 81–100.
〔19〕Auerbach, Alan J., and Laurence J. Kotlikoff (1987), *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press.
〔20〕Flavin, Marjorie A. (1981), "Excess sensitivity of consumption to Changing Expectations about Future Income," *Journal of Political Economy*, vol. 89, no. 5.
〔21〕George R. Zodrow (1990), "The choice between income and Consumption: Efficiency and horizontal equity aspects," in S. Cnossen and R. M. Bird (eds.), *The personal income tax Phoenix from ashes?*, North–Holland.
〔22〕Hall, Robert E. (1978), "Stochastic Implications of the Life–Cycle Permanent Income Hypothesis," *Jounal of Political Economy*,vol. 87, no. 6.
〔23〕———, and Minshkin, Frederic S. (1982), "The Sensitivity of Consumption to Transitory Income: Estimates from Panel Data on Households," *Econometrica*, vol. 50, no. 2.
〔24〕Hayashi, Fumio (1982), "The Permanent Income Hypothesis: Estimation and Testing by Instrumental Variables," *Jounal of Plolitical Economy*, vol. 90, no. 5.
〔25〕Jappelli, Tullio and Macro Pagano (1989), "Consumption and Capital Market Imperfections: An International Comparison," *American Economic Review*, 79, 1088–1105.
〔26〕Mankiw, N. G., J. J. Rotemberg and L. H. Summers (1985), "Intertemporal Substitution in Macroeconomics," *Quarterly Journal of Economics*, pp. 225–251.
〔27〕Robert J. Barro, Xavier Sala–i–Martin (1995), *Economic Growth*, McGraw–Hill, Inc.
〔28〕Varian, Hal R. (1992), *Microeconomic analysis 3rd ed*, W. W. Norton & Company.
〔29〕Walter Enders (1995), *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons, Inc.