最適化問題

千葉昌夫

1. はしがき

経済学の問題は，しばしば，与えられた制約条件の下で目的関数を最大化するという形に定式化される。すなわち，$x \in M \subset R^n_+$, $f: M \to R$, $g_i: M \to R$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))$ とすると，

$$\begin{aligned}&\text{Max}\, f(x)\\&\text{s.t.}\ g(x) \geqq 0\\&\qquad x \in M \subset R^n_+\end{aligned}$$

で表わされる最適化問題である。これを非線形計画問題とよぶ。

なお，等号制約ケースの制約式 $g_i(x) = 0$ は，2つの不等号制約式 $g_i(x) \geqq 0$, $-g_i(x) \geqq 0$ を用いて表現できる。したがって，Lagrange 乗数法は，非線形計画問題の特殊ケースと考えられる。

未定乗数ベルトル $y \in R^m_+$ を導入して，Lagrange 関数をつくる。

$$K(x, y) = f(x) + y \cdot g(x)$$

ただし，$y \cdot g(x) = \sum_{i=1}^m y_i\, g_i(x)$ である。第2節以降の記法も同様に内積を表わすものとする。

この小論の目的は，鞍点問題の視点から，この Lagrange 形式を分析することである。

まず，第2節において，輸送問題，資産選択問題，効用最大化問題および社会厚生の最大化問題を非線形計画問題の例として説明する。第3節において，鞍点や凹関数等の必要な諸概念をとりあげる。第4節において，

次の4つの定理を証明する。

(1) $(\hat{x}, \hat{y})$ が鞍点ならば，$\hat{x}$ は最大化問題の解である。

(2) 目的関数および制約関数が凹関数で，かつ，Slater の制約想定が満たされる場合，$\hat{x}$ が最大化問題の解ならば，$(\hat{x}, \hat{y})$ は鞍点である。

(3) $(\hat{x}, \hat{y})$ が鞍点ならば，Kuhn-Tucker 条件が満たされる。

(4) 目的関数および制約関数が凹関数の場合，Kuhn-Tucker 条件が満たされるならば，$(\hat{x}, \hat{y})$ は鞍点である。

ゼロ0は，ベクトルとスカラーの両方に用いられているので，混乱することなく読んでほしい。

なお，この小論は，ほとんど到るところ，二階堂〔3〕〔4〕，Nikaido〔5〕，西村〔6〕，および Uzawa〔8〕に負っている。

2. 非線形計画問題の例

非線形計画問題は，等号制約つき最大化問題のほかに，線形計画問題と2次計画問題を特殊ケースとして含む。(1)

線形計画問題は，目的関数および制約関数がともに1次関数で，

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

と定式化される。a_{ij}, b_i, c_j は与えられた定数であり，$n>m$ である。この線形計画問題においては，暗黙のうちに比例性と加法性が仮定されている。

飼料混合問題，クラス編成問題，最適価格決定問題，日程計画問題など多数の線形計画問題の例がある。ここでは，Hitchcock にはじまる輸送問題を例としてあげておこう。

例2.1（輸送問題） ある財の i 地 $(i=1, 2, \cdots, m)$ におけるストック量が s_i トン，j 地 $(j=1, 2, \cdots, n)$ における需要量が d_j トンであるとして，所

在地から需要地への財の輸送を考える。i 地から j 地へのトンあたりの輸送費を p_{ij} とするとき，n 需要地 j ($j=1, 2, \cdots, n$) の需要をみたし，かつ，総輸送費を最小化するように輸送計画を定めよ。

i 地から j 地への輸送量を x_{ij} とすれば，これは次のような線形計画問題で表わされる。

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. t.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq s_i \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqq d_j \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ は i 地からの総発送量を表わし，これはストック s_i を越えない。他方 $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ は j 地への総到着量を表わし，これは少くとも d_j に等しくなくてはならない。

2 次計画問題は，目的関数が 2 次関数，制約関数が 1 次関数の，特殊なタイプの非線形計画問題である。それは，

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$$

$$\text{s. t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

と定式化される。a_{ij}, b_i, c_j, d_{ij} は与えられた定数であり，$n>m$ である。

2 次計画問題は，定式化の対象や解法手続き面の類似性からみると，一般の非線形計画問題よりもどちらかといえば線形計画問題に近い構造をもっていると考えられる。そのため，とくに一般の非線形計画問題とは区別して単独に取り扱われている。

次の例は 2 次計画問題の代表的な例である。

例 2.2（資産選択問題） 資金 I を n 種の投資項目（$j=1, 2, \cdots, n$）に分けて投資する。第 j 投資項目から得られる単独投資額当たりからの収益が，確率変数 R_j で表わされる。R_j については，期待値 $E(R_j)=\mu_j$, 共分散 $\mathrm{Cov}(R_i, R_j)=\sigma_{ij}$ がわかっている。この投資から得られる総収益 P は

$$P=\sum_{j=1}^{n} R_j x_j$$

で表わされる。P の期待値は

$$E(P)=E\left(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right)=\sum_{j=1}^{n} E(R_j)x_j=\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j$$

一般に投資の危険度は，P の分散で測定される。そこで，P の分散を求めると，

$$\begin{aligned}E\{P-E(P)\}^2 &= E\left\{\sum_{j=1}^{n}(R_j-\mu_j)x_j\right\}^2\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\{(R_i-\mu_i)(R_j-\mu_j)\}x_i x_j\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\end{aligned}$$

したがって，投資の危険度を考慮した上で，期待値を最大化する投資配分 x_j を求める問題は，次の2次計画問題として定式化される。

$$\mathrm{Max}\ \sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j-\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

$$\text{s. t.}\ \sum_{j=1}^{n}x_j \leqq I$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

ここで $\rho>0$ は期待収益の中に取り入れる危険度（分散）の程度を表わす重みづけの係数である。この最適投資配分の問題は，資産選択の問題と呼ばれている。

2次計画問題は，線形計画問題の最もストレートな拡張であり，例 2.2

の他に最適制御問題，最適配置問題など，実用上重要な問題がこの形に定式化される。

効用最大化問題を非線形計画問題に書いておこう。

例 2.3（効用最大化問題）　所得制約条件を不等号にし，変数の非負性を考慮して定式化すると，次のようになる。

$$\mathrm{Max}\ u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\text{s.t. } I-\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \geqq 0$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

最後に，Bergson-Samuelson 型の社会厚生関数を最大化する問題を考えよう。

例 2.4（社会厚生の最大化問題）　個人の効用関数の組（$u_1, u_2, \cdots, u_l$）から社会厚生 $W(u_1, u_2, \cdots, u_l)$ を作り出す関数

$$W: R^l \to R$$

が存在すると仮定する。個人 i（$i=1, 2, \cdots, l$）の効用関数は $u_i(x_i)$ で表わされるものとする。ただし，$x_i=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$ は個人 i の消費財ベクトルである。ω_j は第 j 財（$j=1, 2, \cdots, n$）の社会の初期賦存量を表わす。社会は初期賦存量の制約の下で社会厚生を最大化する配分 $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_l)$ を選択しなければならない。その問題は次のように定式化される。

$$\mathrm{Max}\ W(u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_l(x_l))$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{l} x_{ij} \leqq \omega_j \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, l;\ j=1, 2, \cdots, n)$$

3.　最大化問題と鞍点問題

第 1 節で述べた次のような最大化問題を考えよう。

$$\mathrm{Max}\ f(x) \tag{3.1}$$

$$\text{s. t.}\ g(x) \geqq 0 \tag{3.2}$$

ここで $g(x)=(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))$ である。$f(x), g_i(x)$ は $M \subset R^n_+$ で定義された実数値関数である。

(3.2)および $x \in M$ をみたすベクトルは実現可能であるといわれる。

(3.1)，(3.2)および $x \in M$ をみたすベクトル $\hat{x}$ は最適ベクトルあるいは解ベクトルであるといわれる。

制約つき最大化問題に対する Lagrange 関数 $K: M \times R^m_+ \to R$ を(3.3)のように定義する。ただし，$M \times R^m_+ \equiv \{(x, y) \mid x \in M, y \in R^m_+\}$ である。

$$K(x, y) = f(x) + y \cdot g(x) \tag{3.3}$$

ここで $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ は Kuhn-Tucker 乗数ベクトルである。

次に，重要な概念である鞍点を定義しよう。

定義 3.1 $M \times R^m_+$ 上のある点 $(\hat{x}, \hat{y})$ が $x \in M$ および $y \in R^m_+$ に対して

$$K(x, \hat{y}) \leqq K(\hat{x}, \hat{y}) \leqq K(\hat{x}, y) \tag{3.4}$$

をみたせば，組 $(\hat{x}, \hat{y})$ を関数 $K(x, y)$ の鞍点という。

換言すれば，鞍点とは，x のみの関数 $K(x, \hat{y})$ が $x = \hat{x}$ において最大値に達し，y のみの関数 $K(\hat{x}, y)$ が $y = \hat{y}$ において最小値に達するような点の組のことである。

鞍点の名の由来は，$K(x, y)$ を $M \times R^m_+$ 上にもりあがった山の高さとするとき，$(\hat{x}, \hat{y})$ がちょうど山の鞍部に相当するからである。ただし，次の例 3.1の関数のグラフ面は馬の鞍とは似ても似つかぬかたちのものであるが，鞍点であることに注意する必要がある。[(2)]

例 3.1 $K(x, y) = 1 - x + y$, $0 \leqq x, y \leqq 1$ とすれば，点 $(0, 0)$ は $K(x, y)$ の鞍点である。$1 - x + \hat{y} \leqq 1 - 0 + \hat{y}$, $1 - \hat{x} + 0 \leqq 1 - \hat{x} + y$ $(0 \leqq x,\ y \leqq 1)$ をみたすから，点 $(0, 0)$ は鞍点である。

鞍点問題とは次の問題をいう。

$K(x, y) = f(x) + y \cdot g(x)$ の鞍点 $(\hat{x}, \hat{y})$ を求めよ。

以下の議論で必要となる凹関数について述べておこう。

定義 3.2 凸集合 $X \subset R^n$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が，$0 \leqq \alpha \leqq 1$, x,

$x' \in X$ に対して

$$f(\alpha x+(1-\alpha)x') \geqq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(x')$$

をみたすならば，凹関数といわれる。不等号が等号のケースを含まずに強い不等号になると，$f(x)$ は強い凹関数といわれる。

例 3.2 $f(x)=-a^x\ (a>0, a\neq 1):R\to R$ は凹関数である。

後に定理 4.4の証明で必要となる形に凹関数を書きかえておこう[3]。

補助定理 3.1 $X\subset R^n$ を開集合かつ凸集合であるとする。$f(x)$ が X 上で定義された微分可能な関数ならば，$f(x)$ が凹関数であることと，任意の $x, \hat{x}\in X, x\neq\hat{x}$ に対して

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}\cdot(x-\hat{x})\geqq f(x)-f(\hat{x})$$

とは同値である。$\partial f(\hat{x})/\partial x$ は勾配ベルトルである。

4. 定　　　理

まず，鞍点と最大化問題の解との間には，次の定理が成立する[4]。

定理 4.1 $(\hat{x}, \hat{y})$ が(3.3)の $M\times R^m_+$ 上における鞍点ならば，$\hat{x}$ は最大化問題の解である。

証明 (3.4)の右側の不等式から

$$\hat{y}\cdot g(\hat{x})\leqq y\cdot g(\hat{x})$$

であり，任意の $y\geqq 0$ に対して

$$(y-\hat{y})\cdot g(\hat{x})\geqq 0 \tag{4.1}$$

もし，$g_1(\hat{x})<0$ ならば，y_1 を $\hat{y}_1$ より大きくとり $y=(y_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_m)$ とおくことによって上式が満たされなくなる。よって $g_1(\hat{x})\geqq 0$ でなければならない。他の $g_i(\hat{x})$ についても同様で，

$$g_i(\hat{x})\geqq 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

である。したがって，$\hat{x}$ は(3.2)を満たす。

$\hat{y}_i\geqq 0$ であるから，$\hat{y}\cdot g(\hat{x})\geqq 0$ である。$\hat{y}\cdot g(\hat{x})\leqq y\cdot g(\hat{x})$ において $y_i=0$ とおくと $\hat{y}\cdot g(\hat{x})\leqq 0$ である，よって

$$\hat{y}\cdot g(\hat{x})=0 \tag{4.2}$$

である。

つぎに，(3.4)の左側の不等式と上述の結果から，

$$f(x)+\hat{y}\cdot g(x)\leqq f(\hat{x})+\hat{y}\cdot g(\hat{x})=f(\hat{x}) \tag{4.3}$$

が任意の $x\in M$ に対して成り立つ。ゆえに，x が(3.2)をみたせば，$\hat{y}\geqq 0$ と一緒にして

$$f(x)\leqq f(x)+\hat{y}\cdot g(x)\leqq f(\hat{x}) \tag{4.4}$$

がえられる（証了）。

定理4.1は，$f(x)$，$g_i(x)$ のかたちに関係なく成立する。それでは，この定理の逆，すなわち，$\hat{x}$ が最大化問題の解ならば，適当な $\hat{y}\in R^m_+$ が存在して，$(\hat{x},\hat{y})$ が $K(x,y)$ の鞍点であるといえるであろうか。これは無条件には成立しないのである。このことを理解するために次の例を考えてみよう。[5]

例4.1　$f(x)=x$, $g(x)=-x^2$ の場合，$x=0$ が制約条件つき最大化問題の解であるが，$K(x,y)=x+y(-x^2)$ は

$$\frac{\partial K(0,y)}{\partial x}=1-2\cdot y\cdot 0=1>0$$

になり，鞍点にならない。

定理4.1の逆が成立するためには，なんらかの条件が必要である。ここでは，Slater の制約想定を用いたUzawa〔8〕のエレガントな証明を述べておこう。[6]

定理4.2　M が凸集合，$f(x)$ および $g(x)$ が M 上の凹関数であるとし，$g(x)$ が次の条件をみたすとする。

Slater の制約想定　M 内に $g(x^0)>0$ となる点 $x^0\geqq 0$ が少くとも一つ存在する。

この仮定のもとに，もしも，$f(\hat{x})$ が条件(3.2)のもとでの，$f(x)$ の最大値であれば，適当な $\hat{y}\in R^m_+$ が存在して，$(\hat{x},\hat{y})$ が(3.3)の $M\times R^m_+$ 上での鞍点となる。

定理 4.2の証明に入る前に，証明過程で必要な分離定理について述べておく。分離定理の内容は，応用目的に応じて，いろいろな形式に書きあらためることができるが，ここでは，定理 4.2の証明に用いられる形での分離定理を述べておこう[7]。

補助定理 4.1（分離定理）　凸集合 X が正象限 R^n_+ の内点をふくまなければ，X と R^n_+ は，原点を通り，非負の係数をもつ超平面によって分離される。

定理 4.2の証明　$\hat{x}$ が最適解であるとする。$(m+1)$ 次元の空間のなかにつぎの二つの集合を定義する。

$$A=\left\{\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \text{ となるような } x \geqq 0 \text{ が存在する。}\right\}$$

$$B=\left\{\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} f(\hat{x}) \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$f(x), g_i(x)$ が凹関数であるということから，A, B がともに凸集合となることはただちにわかる。また，$\hat{x}$ は最適解であるから，A と B とは共通点をもたない。したがって，凸集合の分離定理（補助定理 4.1）によって，すべての $\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \in A$, $\begin{pmatrix} u_0 \\ u \end{pmatrix} \in B$ に対して

$$v_0 z_0 + v \cdot z \leqq v_0 u_0 + v \cdot u \tag{4.5}$$

が成立するような $(m+1)$ 次元のベクトル $(v_0, v) \neq (0, 0)$ が存在する。B の定義から $v_0 \geqq 0, v \geqq 0$ でなければならない。$(f(\hat{x}), 0)$ は B の境界上にあるから，A の定義によって，すべての $x \geqq 0$ に対して

$$v_0 f(x) + v \cdot g(x) \leqq v_0 f(\hat{x}) \tag{4.6}$$

が成り立つ。

このとき，$v_0 > 0$ となる。もし $v_0 = 0$ であったとすれば，$v \geq 0$ である。しかも，すべての $x \geqq 0$ に対して $v \cdot g(x) \leqq 0$ である。これは，$g(x^0) > 0$ をみたす $x^0 \geqq 0$ が存在するという仮定に反する。いま，$\hat{y} = v/v_0$ とおくと，すべての $x \geqq 0$ に対して

$$\hat{y} \geqq 0,\ f(x) + \hat{y}\cdot g(x) \leqq f(\hat{x}) \tag{4.7}$$

が成り立つ。(4.7)において，$x = \hat{x}$ とおくと，$\hat{y}\cdot g(\hat{x}) \leqq 0$ である。他方，$g(\hat{x}) \geqq 0$ だから，

$$\hat{y}\cdot g(\hat{x}) = 0 \tag{4.8}$$

が成り立つ。この(4.7)，(4.8)は，$(\hat{x}, \hat{y})$ が $K(x, y)$ の非負鞍点であることを示している（証了）。

Slater の制約想定は意味は明瞭であるが，Kuhn-Tucker の制約想定よりも強い条件である。Slater の制約想定は

Karlin の制約想定　各 $y > 0$ に対して，$y\cdot g(x^0) > 0$ をみたす点 x^0 が M 内に存在する。

と同値である。[8]

また，定理 4.2では，等号制約問題のケースを特殊問題として含みうるほど一般的ではない。[9] その理由は次のとうりである。$g_i(x) = 0$ を $g_i(x) \geqq 0$, $-g_i(x) \geqq 0$ という不等号で表現して，不等号制約問題に定式化すると，$g_i(\hat{x}) > 0$, $-g_i(\hat{x}) > 0$ を満たす $\hat{x}$ など存在しなくなり，Slater の制約想定は満たされない。しかも $g_i(x)$ が強い凹関数ならば，$-g_i(x)$ は，強い凸関数となり，すべての制約関数が凹関数ではありえなくなる。

次に，$(\hat{x}, \hat{y})$ が $K(x, y)$ の鞍点であるための必要条件を述べよう。[10]

定理 4.3　定理 4.1において，もしも，$M = R^n_+$ で，$f(x)$, $g_i(x)$ がすべて R^n_+ において連続な偏導関数をもつとする。このとき，$(\hat{x}, \hat{y})$ が鞍点であれば，

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x} = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} + \hat{y}\cdot\frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x} \leqq 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}\cdot\hat{x} = \left(\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} + \hat{y}\cdot\frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x}\right)\cdot\hat{x} = 0 \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} = g(\hat{x}) \geqq 0 \tag{4.11}$$

$$\hat{y}\cdot\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial y}=\hat{y}\cdot g(\hat{x})=0 \tag{4.12}$$

が成立する。ただし

$$\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial x}=\left(\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial x_1},\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial x_n}\right)$$

$$\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial y}=\left(\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial y_1},\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial K(\hat{x},\hat{y})}{\partial y_m}\right)$$

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}=\left(\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1},\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n}\right)$$

$$\frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\hat{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\hat{x})}{\partial x_n}\\ \frac{\partial g_2(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(\hat{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(\hat{x})}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g_m(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(\hat{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m(\hat{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

である。

定理 4.3を証明するために，次の補助定理を用いる。[11]

補助定理 4.2　R^n_+ 上で定義された関数 $f(x)$ が，連続な偏導関数をもつとする。もしも，$x=\hat{x}\geqq 0$ において，$f(x)$ が最大（最小）値に達すれば，つぎの二条件が成立する。

(i)　$\dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}\leqq 0\qquad(\geqq 0)$

(ii)　$\dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}\cdot\hat{x}=0$

したがって，$\hat{x}\geqq 0$ を考慮すれば，(i)，(ii)より，$\hat{x}_i>0$ ならば $\dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i}=0$ である。

定理 4.3を証明しよう。

定理 4.3の証明　補助定理 4.2を直接適用すればよい。$(\hat{x},\ \hat{y})$ が鞍点であれば，$K(\hat{x}, \hat{y})$ の $x \geqq 0$ において最大値が $K(\hat{x}, \hat{y})$ なので，(4.9)，(4.10)が成り立つ。また $K(\hat{x},\ y)$ の $y \geqq 0$ において最小値が $K(\hat{x},\ \hat{y})$ なので(4.11)，(4.12)が成り立つ（証了）。

(4.9)－(4.12)を Kuhn-Tucker 条件とよぶ。Kuhn-Tucker 条件のなかで，等号で表わされている(4.10)，(4.12)を書きかえてみよう。

$$\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j\left(\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_j}\right)=0 \tag{4.10$'$}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\, g_i(\hat{x})=0 \tag{4.12$'$}$$

これらの式から次のことがいえる。

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i\frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_j}<0 \text{ ならば，} \hat{x}_j=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$g_i(\hat{x})>0 \text{ ならば，} \hat{y}_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

これらの条件は，非線形計画法における相補条件として知られている。[12]

最後に，定理 4.3の逆を考えてみよう。[13]

定理 4.4　定理 4.3と同様に，$f(x)$，$g_i(x)$ が R^n_+ で連続な偏導関数をもち，かつ，凹関数であるとする。このとき，$\hat{x}\in R^n_+$，$\hat{y}\in R^m_+$ が(4.9)－(4.12)をみたせば，$(\hat{x}, \hat{y})$ は(3.3)の $R^n_+\times R^m_+$ における鞍点である。

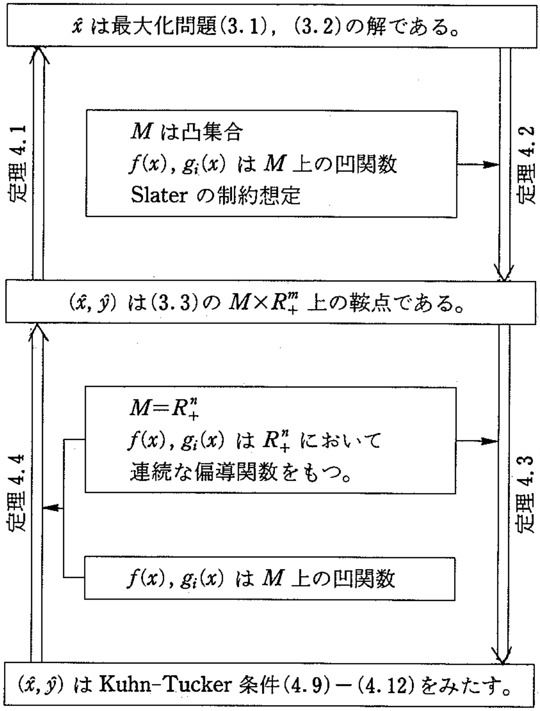
証明　まず，(4.11)，(4.12)から，$K(\hat{x}, y)$ が，$y=\hat{y}$ において，R^m_+ 上の最小値に達することは明らかである。つぎに，$\hat{y}_i \geqq 0$ であるから，凹関数の非負一次結合 $K(x, \hat{y})=f(x)+\hat{y}\cdot g(x)$ は凹関数である。補助定理 3.1より

$$\frac{\partial K(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}\cdot(\hat{x}-x)\leqq K(\hat{x}, \hat{y})-K(x, \hat{y}) \tag{4.13}$$

が成立する。[14] ところが，(4.9)，(4.10)から，(4.13)の左辺は非負である。ゆえに右辺も非負となって，任意の $x\in R^n_+$ について，$K(x,\ \hat{y})\leqq K(\hat{x},\ \hat{y})$ となる（証了）。

定理 4.4は，(4.9)－(4.12)が鞍点であるための十分条件となる場合である。

上述の定理 4.1－定理 4.4の論理的関係は次のようになる。



(1991. 9. 8)

注

(1) 以下の例は，二階堂〔4〕p. 134，渡辺・青沼〔10〕p. 211，西村〔6〕pp. 210-212 および Varian〔9〕pp. 203-204 に負う。

(2) 二階堂〔4〕p. 143 および Takayama〔7〕pp. 66-67 を参照。

(3) 西村〔6〕p. 147 および Takayama〔7〕pp. 84-85 を参照。

(4) 西村〔6〕pp. 203-204 および Uzawa〔8〕pp. 33-34 を参照。

(5) Uzawa〔8〕p. 34 を参照。

(6) Uzawa〔8〕pp. 34-35 を参照。

(7) 二階堂〔3〕 pp. 207-208 および Nikaido〔5〕 p. 35 を参照。

(8) Takayama〔7〕 p.73 および p. 77 を参照。

(9) 西村〔6〕 p. 209 の脚注を参照。

(10) Kuhn-Tucker〔2〕 p. 486 および二階堂〔3〕 p. 258 を参照。

(11) 二階堂〔3〕 pp. 180-181 および Takayama〔7〕 pp. 92-93 を参照。

(12) Intriligator〔1〕 p. 68 を参照。

(13) Kuhn-Tucker〔2〕 p. 486 および二階堂〔3〕pp. 258-259 を参照。

(14) 二階堂〔3〕 p. 259 の脚注も参照。

参 考 文 献

〔1〕 Intriligator, M. D., "Mathematical Programming with Applications to Economics" in Arrow, K. J. and M. D. Intriligator eds., *Handbook of Mathematical Economics,* vol. 1, North-Holland, 1981.

〔2〕 Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming", in Newman, P. ed., *Readings in Mathematical Economics,* vol. 1, Johns Hopkins Press, 1968.

〔3〕 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』, 岩波書店, 1960.

〔4〕 ――――『経済のための線型数学』, 培風館, 1961.

〔5〕 Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press, 1968.

〔6〕 西村和雄『経済数学早わかり』, 日本評論社, 1982.

〔7〕 Takayama, A., *Mathematical Economics,* 2nd ed., Cambridge University Press, 1985.

〔8〕 Uzawa, H., "The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programming," in Arrow, K. J., Hurwicz, L. and H. Uzawa eds., *Studies in Linear and Non-linear Programming,* Stanford University Press, 1958.

〔9〕 Varian, H., *Microeconomic Analysis,* 2nd ed., Norton, 1984.

〔10〕 渡辺　浩・青沼龍雄『数理計画法』, 筑摩書房, 1974.