

ワルラス均衡，リンダール均衡およびコア

千 葉 昌 夫

1. は し が き

Walras 流の競争均衡価格には三つの見方がある。第一は，市場での需給均等を保証する均衡価格という見方である。第二は，Pareto 流の最適性に対応する効率価格という見方である。第三は，ゲーム論的な立場から見なおそうとする見方である。これが「コア」の概念との関係で均衡価格を意味づけようとする極限価格の考え方である。

競争均衡 (Walras 均衡) とコアとの関係について，1880年代に本格的に研究をはじめたのは Edgeworth である。彼の理論は2財・2交換者の場合である。それを一般的な多数財・多数交換者の場合に定式化し，1960年代初期に Debreu & Scarf[3] は，2で述べる諸定理を厳密に証明した。なお，これらの定理は生産を含む場合にも成立する。⁽¹⁾

この小論においては，まず，私的財経済での Walras 均衡とコアとの関係を，上述の Debreu & Scarf[3] にしたがって述べ，つぎに，公共財経済での Lindahl 均衡とコアとの関係を Foley[4] にしたがって検討することにする。

2. Walras 均衡とコア

ここでは，Walras 均衡とコアとの関係を述べよう。簡単化のために，生産のともなわない純粋交換経済について考えよう。定理の証明は省略するので Debreu & Scarf[3] あるいは福岡[5]を参照してほしい。まず，

Walras 均衡とコアを定義しよう。

定義2.1 Walras 均衡とは、消費者は予算制約の下で効用を最大化し、各財の需給が一致している状態をいう。

定義2.2 コアというのは、その経済社会の個人がどんな人数の集団を形成して、そのなかで財の再配分を行うとしても、もはや集団内の何びとかの地位を損なうことなしにはどの個人の地位をもも改善することのできない極限状況⁽²⁾をいう。

Walras 均衡に関する Edgeworth 的見方の核心は、次の定理に含まれている。

定理2.1 Walras 均衡はコアに属する。

これは、凸選好の条件を必要とせず、背理法を用いて簡単に証明することができる。この定理は、二つの重要な意義を持っている。第一は、Walras 均衡が、たんなる Pareto 効率以上のものであることが明確にされている点である。すなわち、Walras 均衡は、全消費者によって阻止されえないばかりでなく、彼らのいかなる結託によっても阻止されえない。第二は、この定理からコアがいかなる条件の下で非空となるかが判明する。すなわち、Walras 均衡の存在条件と同じ条件が満たされていれば、コアの存在も保証される。

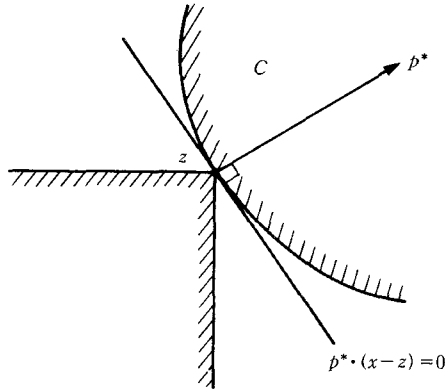
つぎに、定理2.1の逆をいうためには、レプリカ経済という概念が必要である。これは、次のように定義される。

定義2.3 任意の有限な個数の財と個人のタイプとから成る経済について、それに属するそれぞれ同じタイプの個人の数のみを反復して拡大される経済をレプリカ経済と呼ぶ。

Edgeworth の極限定理を証明するためには、次の定理が必要である。これも定理2.1と同様に背理法で証明される。

定理2.2 コアにおける配分は、同じタイプに属するすべての消費者に対して、等しい消費を割り当てる。

以上の準備のもとに、厚生経済学の第2基本定理と同様に、



Minkowski の分離定理を用いて，定理2.3で表わされる極限定理が証明される。

Minkowski の分離定理 C が R^n の非空，凸の部分集合で，点 z が C の内部に含まれないとすれば， z を通り， C を半空間 $p^* \cdot (x - z) \geq 0$ に含みしめるような $p^* \cdot (x - z) = 0$ ， $p^* \neq 0$ が存在する。

定理2.3 レプリカ経済において，コアは次第に収縮して Walras 均衡の集合に近づき，個人数が無限大となる極限においては両者は一致する。

この定理の重要性は次の点を論理的に明らかにした点にある。すなわち，競争価格機構を使わずに行なわれる自発的取引交渉が，たとえ取引費用をまったく必要としないというもっとも有利な状況で行なわれたとしても，Walras 均衡配分は決してそれによって覆されることはないという特徴をもっているということである。⁽³⁾

この後の発展として，Aumann に始まる，当事者の集合を連続体の濃度をもった無限集合ないしは測度空間と考える立場がある。⁽⁴⁾ この立場においては，当事者の集合はあたかも線分上のすべての点の集合であるかのよう考えられ，各当事者が何らの影響力をもたないという条件は，当該の集合が無原子であるという仮定によってあらわされる。このような意味で当事者の数が当初から無限大となっている経済モデルについて次の定理が

成立する。

定理2.4 コアと Walras 均衡の集合とが一致する。

Aumann 型のこのアプローチは、すべての当事者が相異なる選好と相異なる初期賦存量とをもちうることを認めている点で、Debreu & Scarf 型のアプローチより一般的である。

3. Lindahl 均衡とコア

Lindahl[8] により提案された公共財の供給機構は次のとおりである。各経済主体の公共財の供給費用は自己の受け取る便益に応じて支払うという受益者負担の原則を前提とする。この原則にしたがって、各主体は、私的財と同じように公共財の数量的選択を行う。その結果、公共財の費用負担は利用者ごとに個別化された租税価格として、準市場的な機構において、その供給水準と同時的に決定される。⁽⁵⁾このようにして決定される均衡は Lindahl 均衡と呼ばれる。

まず、Johansen[7] により

(1) 公共財を含む場合の厚生経済学の第1基本定理が成立する。
が証明された。

ついで、Foley[4] により、Lindahl 均衡の概念が厳密に構成され、次の三つの結果がえられた。

- (2) 公共財を含む場合にも、厚生経済学の第2基本定理は成立する。
- (3) Lindahl 均衡は存在する。
- (4) Lindahl 均衡はコアに属する。

3.1 仮定と定義

経済には m 個の公共財と k 個の私的財が存在する。公共財と私的財とのベクトルを $(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_k) = (x; y)$ と書く。 n 人の消費者がいて、添字によって区別される。

A 消費に関する仮定

各消費者は自己の消費集合 X^i の点を選択し、彼の消費集合上で完全律

と推移律を満たす選好順序 \succeq_i が定義される。そして、各消費者は私的財の初期賦存量 w^i を所有している。

- A.1 $X = \sum_{i=1}^n X^i$ は \leq に関して下に有界である。
- A.2 X^i は各 i について凸閉集合である。そして、私的財からなる部分空間に内点を有する。
- A.3 あらゆる $\bar{x}^i \in X^i$ について、集合 $\{x^i \in X^i | x^i \succeq_i \bar{x}^i\}$ と $\{x^i \in X^i | x^i \preceq_i \bar{x}^i\}$ はともに X^i において閉じている (連続性)。
- A.4 $\bar{x}^i >_i \bar{x}^i$ ならば $a\bar{x}^i + b\bar{x}^i >_i \bar{x}^i$ である。ただし $a, b > 0$ かつ $a + b = 1$ (凸性)。
- A.5 $(x; y^i) \in X^i$ ならば、 $y^i < w^i$ である点 $(x; \bar{y}^i) \in X^i$ が存在する。
- A.6 $(x; y) \geq (\bar{x}, \bar{y})$ ならば、すべての i について $(x; y) >_i (\bar{x}, \bar{y})$ である (単調性)。

B 生産に関する仮定

生産はベクトル $(x; z)$ で表わされ、投入物は負、生産物は正で示される。すべて技術的に可能な生産計画の集合は Y で表わされる。

- B.1 Y は閉集合で凸錐。凸錐とは、 $(\bar{x}; \bar{z}), (\hat{x}; \hat{z}) \in Y$ で $a, b > 0$ ならば $(a\bar{x} + b\hat{x}; a\bar{z} + b\hat{z}) \in Y$ なることをいう。
- B.2 $0 \in Y$ (不活動の可能性)。
- B.3 $0 \neq (x; z) \in Y$ ならば、少くともひとつの z_j について $z_j < 0$ である。
- B.4 すべての $j = 1, \dots, m$ について、 $x_j > 0$ となるような $(y; z) \in Y$ が存在する (公共財生産の可能性)。
- B.5 $(x; z) \in Y$ とし、 $x_j \geq 0$ のとき $\bar{x}_j = x_j$, $x_j < 0$ のとき $\bar{x}_j = 0$ ならば、 $(\bar{x}; z) \in Y$ である (どの公共財も生産における投入物としては不必要である)。

C 配分・Pareto 効率・Lindahl 均衡

ここで、配分、実現可能な配分、Pareto 効率および Lindahl 均衡を定義しよう。

定義3.1 配分とは、公共財 $x \in E^m$ と n 個の私的財の集合 $y^i \in E^k$ とのベ

クトル (x, y^1, \dots, y^n) である。すべての i について、 $\bar{y}^i < y^i$ である $(x; \bar{y}^i) \in X^i$ が存在する。

定義3.2 実現可能な資源配分とは、 $(x; \sum_{i=1}^n [y^i - w^i]) \in Y$ となるような配分 $(x; y^1, \dots, y^n)$ である。

定義3.3 Pareto 効率とは、すべての i について $(x; \bar{y}^i) >_i (x; y^i)$ となる他の実現可能な配分 $(x; \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)$ が存在しないような実現可能な配分 $(x; y^1, \dots, y^n)$ である。

定義3.4 $w = (w^1, \dots, w^n)$ に関する Lindahl 均衡とは、次の(a), (b)を満たす実現可能な配分 $(x; y^1, \dots, y^n)$ と価格体系 $p = (p_x^1, \dots, p_x^n; p_y) \geq 0$ である。

$$(a) \quad \left(\sum_{i=1}^n p_x^i; p_y \right) \left[x; \sum_{i=1}^n (y^i - w^i) \right] \geq \left(\sum_{i=1}^n p_x^i; p_y \right) (\bar{x}; \bar{z}) \text{ for all } (\bar{x}; \bar{z}) \in Y,$$

$$(b) \quad (\bar{x}^i; \bar{y}^i) >_i (x; y^i) \text{ ならば } p_x^i \cdot \bar{x}^i + p_y \cdot \bar{y}^i > p_x^i \cdot x + p_y \cdot y^i = p_y \cdot w^i$$

(a)は企業の利潤が最大化されていることを示し、(b)は消費者の効用が最大化されていることを示す。なお、(a), (b)には公共財および私的財の需給均衡の条件が含まれている。

Foley[3] は、まず公共財を含む場合の厚生経済学の第2基本定理

$(x; y^1, \dots, y^n)$ が Pareto 効率ならば、定義3.4の(a), (b)を満たす $p \geq 0$ が存在する。

を Minkowski の分離定理を用いて証明した⁽⁶⁾。さらに、Debreu[2] の定理⁽⁷⁾を援用して、

仮定A.1ーA.6およびB.1ーB.5の下で、Lindahl 均衡は存在する。

を証明した。⁽⁸⁾

3.2 コア

ここでは、公共財を含む場合のコアを定義し、Lindahl 均衡とコアとの関係を考察しよう。

定義3.5 配分 $(x; y^1, \dots, y^n)$ が消費者の結託 S によって阻止されるとは、 $\bar{x} \geq 0$ である $(\bar{x}; \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)$ が存在し、 $[\bar{x}; \sum_{i \in S} (\bar{y}^i - w^i)] \in Y$ である、すべての $i \in S$ に対して $(\bar{x}; \bar{y}^i) >_i (x; y^i)$ となることをいう。

定義3.6 もし、配分が任意の非空なる結託によって阻止されえないならば、その配分は賦存量に関する経済のコアに属するという。

Lindahl 均衡はコアに属するという定理は、定理2.1と同様に成立する。

定理3.1 もし $(x; y^1, \dots, y^n; p_x^1, \dots, p_x^n; p_y)$ が w に関する Lindahl 均衡ならば、それは w に関するコアに属する。

証明 結託 S が $(\bar{x}; \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)$ によって $(x; y^1, \dots, y^n)$ を阻止したと仮定しよう。すると、すべての $i \in S$ について、 $(\bar{x}; \bar{y}^i) \succ_i (x; y^i)$ なので Lindahl 均衡の定義により

$$\sum_{i \in S} p_x^i \cdot \bar{x} + p_y \cdot \sum_{i \in S} \bar{y}^i > \sum_{i \in S} p_x^i \cdot x + p_y \cdot \sum_{i \in S} y^i = p_y \cdot \sum_{i \in S} w^i$$

これから

$$\sum_{i \in S} p_x^i \cdot \bar{x} + p_y \cdot \sum_{i \in S} (\bar{y}^i - w^i) > 0$$

すべての i について $p_x^i \geq 0$ なので、 $\sum_{i=1}^n p_x^i \geq \sum_{i \in S} p_x^i$ である。このことは、 $\bar{x} \geq 0$ を考慮すれば、

$$\sum_{i=1}^n p_x^i \cdot \bar{x} + p_y \cdot \sum_{i \in S} (\bar{y}^i - w^i) > 0$$

となる。しかし、Lindahl 均衡の利潤最大化条件は

$$\sum_{i=1}^n p_x^i \cdot \bar{x} + p_y \cdot \bar{z} \leq 0 \quad \text{for all } (\bar{x}; \bar{z}) \in Y$$

である。これは矛盾する。したがって、定理は成立する（証了）。

逆に、「コアの配分が Lindahl 均衡になる」は成立するであろうか。残念ながら、これは、Muench[9] によって成立しないことが反例をもって示された。⁽⁹⁾

奥野・鈴村[10]は、その理由を直観的に次のように説明している。⁽¹⁰⁾ある結託が当初の配分を阻止しようとする、結託内のメンバーがもつ資源だけを用いて問題の配分よりもメンバー全員にとって望ましい状態を実現しなくてはならない。しかし、このような分派行動によってもともと享受し

ていた公共財の便益までもカバーすることは、経済のサイズが大きくなるほどむづかしくなると考えるべきである。したがって、公共財を含む経済では、参加者の数が多いほど結託によって阻止されえない配分の集合コーアは拡大すると予想される。

こうしてみると、Walras 均衡の公共財経済への自然な拡張である Lindahl 均衡は、経済のサイズが大きいほどむしろ興味の少ない公共財の配分機構ということになる。 (1989. 12. 15)

注

- (1) Debreu & Scarf[3] pp. 243-245.
- (2) 福岡[5] p. 14. なお、この 2 において福岡[5]に負うところが大きいことをことわっておきたい。
- (3) 奥野・鈴村[10] p. 255.
- (4) Aumann[1].
- (5) 本間[6] p. 255.
- (6) Foley[4] pp. 68-69.
- (7) Debreu[2] pp. 259-260.
- (8) Foley[4] pp. 70-71.
- (9) Muench[9] pp. 254-255.
- (10) 奥野・鈴村[10] pp. 308-309.

参 考 文 献

- [1] Aumann, R. J., "Markets with a Continuum of Traders," *Econometrica*, 32, 1964.
- [2] Debreu, G., "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis," *International Economic Review*, 3, 1962.
- [3] ——— and H. Scarf, "A Limit Theorem on the Core of an Economy," *International Economic Review*, 4, 1963.
- [4] Foley, D. K., "Lindahl's Solution and the Core of an Economy with Public Goods", *Econometrica*, 38, 1970.
- [5] 福岡正夫『一般均衡理論』, 創文社, 1982.
- [6] 本間正明「市場の失敗」, 篠原・熊谷編『経済学大辞典』I, 東洋経済新報

社, 1980.

- [7] Johansen, L., "Some Notes on the Lindahl Theory of Determination of Public Expenditures," *International Economic Review*, 4, 1963.
- [8] Lindahl, E., "Just Taxation—A Positive Solution," in Musgrave, R. A. and A. T. Peacock (eds.), *Classics in the Theory of Public Finance*, London: Macmillan, 1958.
- [9] Muench, T. J., "The Core and the Lindahl Equilibrium of an Economy with a Public Good: an Example," *Journal of Economic Theory*, 4, 1972.
- [10] 奥野正寛・鈴木興太郎『ミクロ経済学』Ⅱ, 岩波書店, 1988.