

宇沢の同値定理について

千 葉 昌 夫

は し が き

ワルラス体系は多数の消費者と多数の生産者から構成され、生産、交換、消費の対象になる多数の財がある。各消費者は自己の予算制約の下に、価格体系に対して最適な財の需給計画をたてる。各生産者は生産技術の制約の下に、価格体系に対して最適な財の需給計画をたてる。このような個別需給計画を社会全体にわたって統合するとき、各財についての需要と供給が均衡すれば個別計画は相互に整合的で実行可能なものとなる。このような均衡状態は任意の価格体系の下では一般に実現し得ない。適切な価格体系の下に各財について総需要と総供給が均衡する状態が、ワルラスによって考えられた一般均衡である。

ワルラス体系の均衡解の存在問題に関しては、ワルラス以来かなり長期間にわたって大多数の経済学者は、方程式と未知数の個数の一致の確認という、素朴な数学的論拠で満足していた。しかし、これは均衡解の存在証明になんの役にも立たないのである。このことを理解するために、二階堂[2]による簡単な例をあげよう。連立方程式

$$f_1(x, y) = x + y = 0$$

$$f_2(x, y) = xy - 1 = 0$$

の関数行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y$$

は、平面全域から直線 $x - y$ を取りのぞいた残りの開集合 G 内で、0 にな

らない。ゆえに、この方程式は G における独立な方程式体系である。しかし、この方程式は明らかに、 G はもとより、平面内に解をもたない。

1950年代に至って、ワルラス体系の解の存在は、ナッシュ流の n 人ゲームの構想にもとづくアローニドブリュー[1]を嚆矢とする一群の数理経済学者によって厳密に証明された。これらの解の存在証明は、最終的には位相数学におけるもっとも著名な定理のひとつであるブラウワーの不動点定理に帰着される。

ところがさらに驚いたことに、ワルラス体系の均衡解の存在問題が終結した1962年に宇沢[8]によって、ワルラスの存在定理とブラウワーの不動点定理は同値であるという定理が証明された。この同値定理はワルラスがなぜ均衡解の存在問題を決定的な意味で解くことができなかったかを明らかにしているのである。

以下、1においてブラウワーの不動点定理について述べ、2においてワルラスの存在定理、3においてその例を述べ、4において宇沢の同値定理について述べる。最後に、5において宇沢の同値定理の一般化について簡単にふれることにする。

1. ブラウワーの不動点定理

20世紀のはじめ、位相数学の分野においてきわめて重要であり、一般均衡解の存在問題と不可分の関係にある定理が生まれた。それは次に述べるブラウワーの不動点定理である。

定理1(ブラウワーの不動点定理) X を R^n 内のコンパクトな凸集合とする。 $f: X \rightarrow X$ を、 X の点 x を X の点 $f(x)$ に対応させる、連続な写像であるとすれば、不動点 $\bar{x} = f(\bar{x})$ が存在する。

証明はきわめてむずかしいので二階堂[2]、[4]にゆずることにして、 R^1 における証明を坂口[5]にしたがってあたえることにする。 R^1 の中のコンパクトな凸集合は単位閉区間 $[0, 1]$ として一般性を失わない。 $f(x)$ を $[0, 1]$ で定義され、 $[0, 1]$ 内のある部分集合を値域とする

任意の連続関数とするととき $\bar{x} \in [0, 1]$ が存在して $f(\bar{x}) = \bar{x}$ をいえばよい。あきらかに $0 \leq f(0), f(1) \leq 1$ である。もしも

$$f(0) = 0 \text{ あるいは } f(1) = 1 \quad (1.1)$$

であれば定理はすでに成立している。もしも

$$f(0) > 0 \text{ および } f(1) < 1 \quad (1.2)$$

ならば、連続関数 $g(x) \equiv f(x) - x$ について $g(0) > 0 > g(1)$ であるから、中間値の定理により、ある $\bar{x} \in (0, 1)$ が存在して $g(\bar{x}) = 0$, すなわち、 $\bar{x} = f(\bar{x})$ となるはずである

2. ワルラスの存在定理

n 個の財が存在する。財ベクトルを $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とし価格ベクトルを $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ とする。価格ベクトルは非零かつ非負とする。 P, X をそれぞれ価格ベクトルの集合、財ベクトルの集合とする。

$$P = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) : p_i \geq 0 \ (i=1, 2, \dots, n), p \neq 0\}$$

$$X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

超過需要関数 $z(p) = (z_1(p), z_2(p), \dots, z_n(p))$ は P から X への関数である。均衡価格ベクトルを次のように定義する。

定義(均衡価格ベクトル) 価格ベクトル \bar{p} は

$$z_i(\bar{p}) \leq 0 \ (i=1, 2, \dots, n)$$

であるとき均衡価格ベクトルであるといわれる。ただし、 $\bar{p}_i = 0 \ (i=1, 2, \dots, n)$ でなければ等号が成立する。

この定義の意味は、次のとおりである。 $z_i(\bar{p}) \leq 0 \ (i=1, 2, \dots, n)$ という条件は、どの財の市場にも正の超過需要があってはならないということである。ただし、価格がゼロでなければ、すなわち、正ならば対応する超過需要はゼロである。後者の対偶をとれば、負の超過需要がある場合には、対応する価格はゼロになる。

ワルラスの存在定理は次のように述べられる。

定理 2(ワルラスの存在定理) 超過需要関数 $z(p)$ が次の条件を満たすも

のとする。

(1) $z(p)$ は P から X への連続関数である。

(2) $z(p)$ は 0 次同次である。すなわち、すべての $t > 0$, すべての $p \in P$ について

$$z(tp) = z(p)$$

である。

(3) ワルラス法則¹⁾が成立する。すなわち、すべての点 $p \in P$ について

$$\sum_{i=1}^n p_i z_i(p) = 0$$

このとき、 $z(p)$ について、すくなくとも 1 個の均衡価格ベクトルが存在する。

証明 (2)を仮定することによって、われわれの分析をなんら限定することなく、 p の水準を自由に固定することができる。そのような方法としてもっとも便利なのは、価格ベクトルをすべての財の価格の総和が 1 になるように規準化することである。すなわち、

$$P_{n-1} = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) : p_i \geq 0 \ (i=1, 2, \dots, n), \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$$

とする。次に、価格調節関数 $p \rightarrow T(p) = (T_1(p), T_2(p), \dots, T_n(p))$ を定義する。

$$T_i(p) = \frac{1}{\lambda(p)} \max\{0, p_i + k z_i(p)\} \quad (i=1, 2, \dots, n, p \in P) \quad (2.1)$$

ただし

$$k > 0 \quad (2.2)$$

$$\lambda(p) = \sum_{i=1}^n \max\{0, p_i + k z_i(p)\} \quad (2.3)$$

とする。

価格調節関数(2.1)の意味は次のとおりである。右辺の $\max\{0, p_i +$

1) $\sum_{i=1}^n p_i z_i(p) = 0$ を狭義のワルラス法則といい、 $\sum_{i=1}^n p_i z_i(p) \leq 0$ を広義のワルラス法則という。二階堂 [4] pp. 262-263。

$kz_i(p)\}$ は、もし第 i 財に超過需要があれば、当初の価格 p_i はその超過需要に比例した大きさだけ引上げられ、超過供給があれば、 p_i はその超過供給に比例した大きさだけ引下げられることを意味している。すなわち、両側伸縮型である。ただし、 p_i はゼロより引下げられることはない。また、これを分母で割っているのは、調節ずみの価格をふたたび価格単位 P_{n-1} に含ましめるためである。

$\lambda(p) > 0$ である。いまもし、 $\lambda(p) = \sum_{i=1}^n \max\{0, p_i + kz_i(p)\} = 0$ とすれば、 $\max\{0, p_i + kz_i(p)\} \geq 0$ であるから、すべての i について $\max\{0, kz_i(p)\} = 0$ でなければならない。したがって、 $p_i + kz_i(p) \leq 0$ でなければならない。そこで、 $p_i \geq 0$ をそれぞれ両辺にかけて合計すれば $\sum_{i=1}^n p_i^2 + k \sum_{i=1}^n p_i z_i(p) \leq 0$ となりワルラス法則から $\sum_{i=1}^n p_i^2 \leq 0$ となる。しかし、 $p \in P_{n-1}$ であるから、 $\sum_{i=1}^n p_i^2 > 0$ でなければならない、これは不合理である。

P_{n-1} は R^n 内のコンパクトな凸集合であり、 $T(p)$ は P_{n-1} から P_{n-1} への連続関数である。故にブラウワーの不動点定理を適用することによって、

$$\bar{p} = T(\bar{p}) \quad (2.4)$$

であるような規準化された価格ベクトル $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)$ が存在する。(2.1)を考慮すれば(2.4)は

$$\lambda(\bar{p})\bar{p}_i = \max\{0, \bar{p}_i + kz_i(\bar{p})\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

となる。(2.5)に \bar{p}_i をかけ i について合計すれば

$$\sum_{i=1}^n \lambda(\bar{p})\bar{p}_i^2 = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i^2 + \sum_{i=1}^n \bar{p}_i z_i(\bar{p}) \quad (2.6)$$

となる。ここで、ワルラス法則を考慮すれば

$$\lambda(\bar{p}) = 1 \quad (2.7)$$

であるから、(2.5)は次のようになる。

$$\bar{p}_i = \max\{0, \bar{p}_i + kz_i(\bar{p})\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.8)$$

いま、 $p_i + kz_i(\bar{p}) > 0$ とすれば、 $kz_i(\bar{p}) = 0$ である。 $k > 0$ であるから $z_i(\bar{p}) = 0$ 、つぎに、 $\bar{p}_i + kz_i(\bar{p}) \leq 0$ とすれば、(2.3)から $\bar{p}_i = 0$ 、これと

$k > 0$ とから $z_i(\bar{p}) \leq 0$ となる。ゆえに \bar{p} は均衡価格ベクトルである (証了)。

上述の証明は宇沢 [7] によるが、二階堂 [3] による別証明は次のとおりである。まず価格調節関数を

$$\phi_i(p) = \frac{p_i + \theta_i(p)}{1 + \sum_{j=1}^n \theta_j(p)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

と定義する。ただし、

$$\theta_i(p) = \max \{z_i(p), 0\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.10)$$

である。この関数 ϕ_i は片側伸縮型と名づけられ、第 i 財に超過需要があれば、当初の価格 p_i はその超過需要の大きさだけ引き上げられ、また超過供給があれば p_i はそのまま据え置かれることを意味する。

P_{n-1} から P_{n-1} への連続関数 $p \rightarrow \phi(p) = (\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p))$ はブラウワーの不動点定理により、 $\bar{p} = \phi(\bar{p})$ 、これから

$$\bar{p}_i \sum_{j=1}^n \theta_j(\bar{p}) = \theta_i(\bar{p}) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.11)$$

が従う。(2.11)の第 i 番目の方程式に $z_i(\bar{p})$ をかけて合計して広義のワルラス法則を考慮すれば、 $\theta_i(p)^2 = \theta_i(p)z_i(p)$ 故

$$0 \geq \sum_{i=1}^n p_i z_i(\bar{p}) \sum_{j=1}^n \theta_j(\bar{p}) = \sum_{i=1}^n \theta_i(\bar{p})^2 \quad (2.12)$$

ゆえに、 $\theta_i(\bar{p}) = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) となり、これより、すべての i について $z_i(\bar{p}) \leq 0$ となる。

3. 例

定理2の例をバイントラップ [9] にしたがって m 人、 n 財からなる純粋交換経済で考えよう。 x_i^r を第 r 個人の第 i 財の需要量とし第 r 個人の効用関数を

$$u^r = \sum_{i=1}^n a_i^r \log x_i^r, \quad \sum_{i=1}^n a_i^r = 1, \quad 0 < a_i^r < 1 \quad (3.1)$$

とする。 M^r を第 r 個人の所得とし、(3.1)を予算制約式

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i^r = M^r \quad (3.2)$$

の下で最大化すれば、第 r 個人の第 i 財についての需要関数

$$x_i^r = \frac{a_i^r M^r}{p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

を得る。(3.3)を r について合計すると第 i 財についての需要関数

$$x_i = \sum_{r=1}^m x_i^r = \sum_{r=1}^m \frac{a_i^r M^r}{p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

を得る。ここで、 $M = \sum_{r=1}^m M^r$ とし、すべての個人が同一の嗜好をもつ、すなわち、 $a_i^r = a_i$ ($r=1, 2, \dots, m$) と仮定すれば、(3.4)は

$$x_i = \frac{a_i M}{p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

となる。いま、第 j 財の当初保有量を \bar{x}_j とし、総所得 M が当初保有量の価値の総和に等しいと仮定すれば

$$M = \sum_{j=1}^n p_j \bar{x}_j \quad (3.6)$$

である。すると、 M もまた p の関数となるから、第 i 財の需要関数は

$$x_i(p) = \frac{a_i}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j \bar{x}_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

となる。

第 i 財の超過需要関数 $z_i(p)$ は

$$\begin{aligned} z_i(p) &= x_i(p) - \bar{x}_i \\ &= \frac{a_i}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j \bar{x}_j - \bar{x}_i \\ &= \frac{a_i}{p_i} \left[\sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{\delta_{ij}}{a_i} \right) p_j \bar{x}_j \right] \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ただし、 $i=j$ ならば $\delta_{ij}=1$ であり、 $i \neq j$ ならば $\delta_{ij}=0$ である。

各 i に対し $z_i(p)$ は p に関して明らかに連続であり、どんな $t > 0$ に対しても $z_i(tp) = z_i(p)$ であり、 i について合計すれば、狭義のワルラス法則が成立することがわかる。したがって、(3.8) で表わされる超過需要ベクトル $z(p) = (z_1(p), z_2(p), \dots, z_n(p))$ は定理 2 の条件(1), (2), (3)を満すから、すくなくともひとつの均衡価格ベクトル \bar{p} が存在する。実

際, $\bar{p}_j = a_j / \bar{x}_j$ ($j=1, 2, \dots, n$) としてみると, (3.8)は

$$\begin{aligned} z_i(\bar{p}) &= \bar{x}_i \left[\sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{\delta_{ij}}{a_i} \right) a_j \right] \\ &= \bar{x}_i \left(\sum_{j=1}^n a_j - 1 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

4. 宇沢の同値定理

宇沢 [8] は, 逆に, ワルラスの存在定理からブラウワーの不動点定理が導れることを示した。これにより, ワルラス体系の均衡解存在定理とブラウワーの不動点定理が同値であることが明らかになったわけである。

ここで, ブラウワーの不動点定理を基本単体を対象としたかたちに書き直しておく。

定理1' $\varphi(\pi)$ を基本単体 $II_{n-1} = \{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) : \pi_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \pi_i = 1\}$ から II_{n-1} への連続関数とすれば, 不動点 $\bar{\pi} = \varphi(\bar{\pi})$ が存在する。

宇沢の同値定理は次のように書かれる。

定理3 (宇沢の同値定理) ワルラスの存在定理とブラウワーの不動点定理は同値である。

証明 ブラウワーの不動点定理がワルラスの存在定理を導くことは定理2で証明されたから, 逆を証明するだけでよい。

$\varphi(\pi)$ を II_{n-1} から II_{n-1} への任意の連続関数とする。次のような超過需要関数 $z(p) = (z_1(p), z_2(p), \dots, z_n(p))$ をつくる。

$$z_i(p) = \varphi_i \left(\frac{p}{\eta(p)} \right) - p_i \mu(p) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

ただし

$$\eta(p) = \sum_{i=1}^n p_i \quad (4.2)$$

$$\mu(p) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \varphi_i \left(\frac{p}{\eta(p)} \right)}{\sum_{i=1}^n p_i^2} \quad (4.3)$$

である。 $\varphi_i(p/\eta(p))$ および $p_i\mu(p)$ はともに 0 次同次である。(4.1)で定義した超過需要関数は, 明らかに定理 2 の条件(1), (2), (3)を満す。ゆえに, 均衡価格が存在する。(4.1)より

$$\varphi_i\left(\frac{\bar{p}}{\eta(\bar{p})}\right) \leq \bar{p}_i\mu(\bar{p}) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.4)$$

ただし $\bar{p}_i=0$ でなければ等号が成立する。ここで

$$\bar{\pi} = \frac{\bar{p}}{\eta(\bar{p})} \quad (4.5)$$

$$\beta = \eta(\bar{p})\mu(\bar{p}) \quad (4.6)$$

とおけば, (4.4)は次のように書きかえられる。

$$\varphi_i(\bar{\pi}) \leq \beta\bar{\pi}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.7)$$

ただし $\bar{\pi}=0$ でなければ等号が成立する。(4.7)を i について合計して, $\bar{\pi}, \varphi(\bar{\pi}) \in II_{n-1}$ を考慮すれば,

$$\varphi_i(\bar{\pi}) = \beta\bar{\pi}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.8)$$

を得る。²⁾同様にして, (4.8)から

$$\varphi_i(\bar{\pi}) = \bar{\pi}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.9)$$

を得る。すなわち, $\bar{\pi}$ は写像 $\varphi(\bar{\pi})$ の不動点である (証了)。

5. 一般化

ワルラスの存在定理は, ゲール=二階堂の定理として次のように一般化される。³⁾ P_{n-1} を価格単体, X を R^n の空でないコンパクトな凸集合とする。さらに, 超過需要関数 $z(p)$ は P_{n-1} の各点に X の部分集合を対応させる写像であるとし, 次の条件を満たすものとする。 $z(p)$ が非空, コンパクトかつ凸な像をもち, その写像が上半連続で, しかも広義のワルラス法則が成立する。このとき, 適当な $\bar{p} \in P_{n-1}$ に対して $\bar{z} \in \bar{z}(\bar{p})$ を

2) このあたりの宇沢 [8] p. 61 の論旨は明快でないので, 二階堂 [4] p. 269 にしたがった。

3) たとえば, 二階堂 [4] pp. 265-267 参照。

とれば, $\bar{z} \leq 0$ となるような (\bar{p}, \bar{z}) が存在する。

ブラウワーの不動点定理は、角谷の不動点定理として次のように一般化される。 X が R^n 内のコンパクトな凸集合, $f: X \rightarrow 2^X$ が X の点 x に X の凸部分集合を対応させる点対集合写像で、上半連続とすれば、不動点 $\bar{x} \in f(\bar{x})$ が存在する。

ゲール＝二階堂の定理は角谷の不動点を用いて証明される。逆に、鈴木 [6] により、角谷の不動点定理からゲール＝二階堂の定理が導れる。これが一般化された字沢の同値定理である。

(1981.6.26)

参 考 文 献

- [1] Arrow, K. J. and Debreu, G., "Existence of Equilibrium in a Competitive Equilibrium," *Econometrica*, Vol. 22, 1954.
- [2] 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』, 岩波書店, 1961.
- [3] Nikaido, H., "A Technical Note on the Existence Proof for Competitive Equilibrium," 『季刊理論経済学』, 第13巻第1号, 1962.
- [4] Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory*, New York: Academic Press, 1968.
- [9] 坂口実『ゲームの理論』, 森北出版, 1969.
- [6] Suzumura, K., "Professor Uzawa's Equivalence Theorem: A Note," 『季刊理論経済学』, 第24巻第2号, 1973.
- [7] Uzawa, H., "Walras' Tâtonnement in the Theory of Exchange," *Review of Economic Studies*, Vol. 27, 1960.
- [8] Uzawa, H., "Walras' Existence Theorem and Brouwer's Fixed Point Theorem," 『季刊理論経済学』, 第13巻第1号.
- [9] Weintraub, E. R., *General Equilibrium Theory*, Macmillan, 1974.
- [10] 安井琢磨・熊谷尚夫・福岡正夫『近代経済学の理論構造』第二版, 筑摩書房, 1977.