

# ストカステックボラティリティモデルの推定 におけるハイブリッドモンテカルロ法の応用

高 石 哲 弥

## 1. はじめに

株式収益率や為替レート収益率の時系列を分析する場合、一般には時系列を模倣するモデルを仮定し、時系列データからそのモデルのパラメータを推定する。仮定されるモデルとしてはさまざまなものが存在するが、それらのモデルは現実の収益率が持つ性質をなるべく多く反映することが期待される。

オプション価格の式として有名なブラックショールズの方程式では、収益率の変動はブラウン運動を行い、変動の大きさに対応するボラティリティは変化しないと仮定されている。しかし、現在ではこの仮定はあまりにも単純化されており、現実の収益率の性質を反映していないことが知られている[1]。

現実の収益率もつ性質としてまず挙げられるのは、ボラティリティは一定でなく時間的に変動することである。更に、ボラティリティの変動のショックは持続する傾向があり、ボラティリティが大きくなるとボラティリティが大きい状態が継続し、また逆にボラティリティが小さくなると小さい状態が継続する傾向がある（ボラティリティクラスタリングという）。

収益率の分布については、中心極限定理が成り立つとすれば、正規分布になると期待されるが、現実の収益率の分布は正規分布とは違う分布をしていることが多い。そして、その分布は正規分布より裾野の広がった分布（ファットテイル分布）をしていることが知られている。

ボラティリティが変動し、かつ変動のショックが持続するモデルとして、Engle[2]による ARCH (Autoregressive conditional heteroskedasticity) モデルや Bollerslev[3]による GARCH (generalized ARCH) モデルが知られている。これらのモデルでは、 $t$  時のボラティリティは  $t-1$  時の値から決定されており、そこには何の不確定性もない。そのため尤度関数は簡単に計算することができ、パラメータの推定に最尤法を用いることができる。

ボラティリティの変動に確率的な不確定性を付け加えたモデルも考えることができ、そのモデルはストカスティックボラティリティモデルと呼ばれる。ストカスティックボラティリティモデルの場合、ボラティリティの変動が確率的にしか決定されないため、モデルの尤度関数は積分の形として現れる。尤度関数が積分になる場合、ARCH モデルや GARCH モデルで利用されている最尤法を使った推定を実行するのは困難となる。そのため、ストカスティックボラティリティモデルの推定には最尤法に代わり、ベイズの定理に基づくマルコフ連鎖モンテカルロ法が推定に利用されることが多い。

マルコフ連鎖モンテカルロ法では、モデルを記述するパラメータの確率分布が与えられ、その確率分布に従ってパラメータ値が生成される。そして、パラメータの推定値は生成されたパラメータ値の平均値として与えられる。

パラメータ値を逐次生成させる方法は一意ではなくさまざまな方法が存在する。その中でよく利用されるのはメトロポリス法[4]やギブス法と呼ばれる手法である。ストカスティックボラティリティの推定においてもこれらの手法が利用されているが、そのままでは生成の効率が悪いので、効率を上げる工夫も考案されている[5]。

本研究ではハイブリッドモンテカルロ法を利用してストカスティックボラティリティの推定を実行する。ハイブリッドモンテカルロ法はメトロポリス法やギブス法と違い、変数を一度にアップデートできるグローバルなタイプのモンテカルロ法である。本研究ではこのグローバルなモンテカル

ロ法を利用した場合にモンテカルロ列の生成の効率が上がるかどうかを調べる。

ARCH モデルや GARCH モデルの推定では最尤法が主流であるが、近年コンピュータの性能の向上によりマルコフ連鎖モンテカルロ法も利用されるようになってきている[6][7]。GARCH モデルの推定にハイブリッドモンテカルロ法を応用した研究は参考文献[14]で報告されている。また、モデルの推定ではないが、人工的な株価経路の生成にハイブリッドモンテカルロを利用した研究は参考文献[15]で報告されている。

## 2. ストカスティックボラティリティモデル

ストカスティックボラティリティモデルにおける時系列  $y_t$  は以下によって表される。

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (1)$$

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \phi \log(\sigma_{t-1}^2) + \eta_t \quad (2)$$

ここで、 $\varepsilon_t$  は平均が 0、分散 1 の正規分布に従う確率変数である。また、 $\eta_t$  は平均 0、分散  $\sigma_\eta^2$  の正規分布に従う。このモデルにおけるパラメータは  $\omega$ 、 $\phi$  及び  $\sigma_\eta^2$  である。また、このモデルにおいてボラティリティ変数  $\log(\sigma_t^2)$  の分布は

$$\log(\sigma_t^2) \sim N\left(\frac{\omega}{1-\phi}, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right). \quad (3)$$

で表される正規分布に従うことになる。

推定に必要なストカスティックボラティリティモデルの尤度関数  $f(y_t | \theta)$  は以下で与えられる[16]。ここで、 $\theta$  はモデルのパラメータで  $\theta = (\omega, \phi, \sigma_\eta^2)$  を表している。

$$f(y_t | \theta) = \int \left[ \prod_{i=1}^T f(y_i | \sigma_i^2) \right] f(\sigma_1^2 | \theta) \left[ \prod_{i=2}^T f(\sigma_i^2 | \sigma_{i-1}^2; \theta) \right] d\sigma_1^2 \cdots d\sigma_T^2. \quad (4)$$

ここで、 $f(y_t | \theta)$ 、 $f(\sigma_t^2 | \sigma_{t-1}^2; \theta)$ 、 $f(\sigma_1^2 | \theta)$  はそれぞれ以下で与えられる。

$$f(y_t | \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right). \quad (5)$$

$$f(\sigma_t^2 | \sigma_{t-1}^2; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{[\ln(\sigma_t^2) - \omega - \phi\ln(\sigma_{t-1}^2)]^2}{2\sigma_\eta^2}\right). \quad (6)$$

$$f(\sigma_1^2 | \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)}\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{[\ln(\sigma_1^2) - \omega/(1-\phi)]^2}{2\sigma_\eta^2(1-\phi^2)}\right). \quad (7)$$

もし、ストカスティックボラティリティのパラメータ推定に最尤法を利用する場合、式(4)を最大化するパラメータ  $\theta$  を求めなければならないが、尤度関数が積分の形で与えられているので、積分を実行しながら尤度関数を最大化するパラメータを探索するのは困難である。そのため、ストカスティックボラティリティのパラメータ推定では、積分を直接実行する必要のないベイズ推定に基づくマルコフ連鎖モンテカルロ法が用いられることが多い。

ベイズ推定では以下のようにデータ  $y_t$  のもとでのパラメータ  $\theta$  の従う確率分布  $p(\theta | y_t)$  が与えられる。

$$p(\theta | y_t) = \frac{f(y_t | \theta) \pi(\theta)}{f(y_t)}. \quad (8)$$

ここで、 $f(y_t | \theta)$  は尤度関数と呼ばれるもので、式(4)で与えられる。 $\pi(\theta)$  は事前分布であり、パラメータごとに与えられる主観的な分布で一意ではなく、あらかじめ仮定した分布を設定する。 $f(y_t)$  は規格化定数に当たるもので、以下で与えられる。

$$f(y_t) = \int f(y_t | \theta) \pi(\theta) d\theta. \quad (9)$$

$f(y_t)$  はマルコフ連鎖モンテカルロ法においては単なる定数で重要ではないので具体的な表式は必要ではない。

ベイズ推定におけるパラメータの推定値は確率分布  $p(\theta | y_t)$  のもとでのパラメータの期待値として与えられる。

$$\begin{aligned}\langle \theta \rangle &= \int \theta p(\theta | y_t) d\theta \\ &= \int \theta f(y_t | \theta) \pi(\theta) d\theta / f(y_t).\end{aligned}\tag{10}$$

式(10)は一般には解析的に積分はできないので、マルコフ連鎖モンテカルロ法によって式(10)に対応する値を見積もる。

マルコフ連鎖モンテカルロ法では、確率分布  $p(\theta | y_t)$  に従う確率でパラメータを逐次生成する。このとき生成されたパラメータのモンテカルロ列を  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  とすると、パラメータの期待値は以下のようにモンテカルロ列の平均値として与えられる。

$$\bar{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i.\tag{11}$$

また、

$$\langle \bar{\theta} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\theta}_n,\tag{12}$$

であるから、 $n$  の値が十分大きければ  $\langle \theta \rangle \approx \bar{\theta}_n$  となる。

### 3. ストカスティックボラティリティモデルにおけるマルコフ連鎖モンテカルロ法

式(1)及び(2)で与えられるストカスティックボラティリティモデルには推定するパラメータが3つ  $(\omega, \phi, \sigma_\eta^2)$  あり、それぞれに対応する確率分布がベイズの定理により与えられる。そして、それらのパラメータに対応する数値はマルコフ連鎖モンテカルロ法によってアップデートをしながら生成される。更に、ストカスティックボラティリティモデルではボラティリティ変数も積分されるものとして現れるのでマルコフ連鎖モンテカルロ法によってアップデートする必要がある。以下では、パラメータ及びボラティリティ変数に対する確率分布を与える。

本研究での推定は式(2)を以下のように再定義したパラメータに対して推定を実行する。

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t. \quad (13)$$

ここで、ボラティリティ変数  $\sigma_n^2$  は以下のように  $h_t$  で再定義する。

$$h_t = \log(\sigma_t^2). \quad (14)$$

また、 $\mu$  と  $\omega$  の間には以下の関係式が成り立つ。

$$\omega = \mu(1 - \phi) \quad (15)$$

以下のパラメータ及びボラティリティ変数に対する確率分布は式(13)を利用したときのものである。

●  $p(\mu | y_t)$

データ  $y_t$  のもとでの  $\mu$  に対する確率は  $p(\mu | y_t) = f(y_t | \mu) f(\mu)$  で与えられる。ここでは、事前分布  $f(\mu)$  は定数であると仮定する。この場合  $p(\mu | y_t)$  は以下で与えられる。

$$p(\mu | y_t) \propto \exp\left(-\frac{A}{2\sigma_\eta^2}\left(\mu - \frac{B}{A}\right)^2\right). \quad (16)$$

$$A = (1 - \phi^2) + (T - 1)(1 - \phi)^2. \quad (17)$$

$$B = (1 - \phi^2) h_1 + (1 - \phi) \sum_{t=1}^T (h_t - \phi h_{t-1}). \quad (18)$$

$p(\mu | y_t)$  は正規分布であるから  $\mu$  のアップデートは容易に実行できる。

●  $p(\sigma_n^2 | y_t)$

データ  $y_t$  のもとでの  $\sigma_n^2$  に対する確率は  $p(\sigma_\eta^2 | y_t) = f(y_t | \sigma_\eta^2) f(\sigma_\eta^2)$  で与えられ、事前分布  $f(\sigma_\eta^2)$  として  $\frac{1}{\sigma_\eta^2}$  を取ると  $p(\sigma_\eta^2 | y_t)$  は以下で与えられる。

$$p(\sigma_\eta^2 | y_t) \propto (\sigma_\eta^2)^{-\frac{T}{2}-1} \exp\left(-\frac{C}{\sigma_\eta^2}\right). \quad (19)$$

ここで、

$$C = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \phi^2) (h_1 - \mu)^2 + \sum_{t=2}^T [h_t - \mu - \phi(h_{t-1} - \mu)]^2 \right\}. \quad (20)$$

である。 $p(\sigma_n^2 | y_t)$  は逆ガンマ分布であるからこの分布を確率分布として  $\sigma_n^2$  をアップデートするのは容易である。

●  $p(\phi | y_t)$

データ  $y_t$  のもとでの  $\phi$  に対する確率は  $p(\phi | y_t) = f(y_t | \phi) f(\phi)$  で与えられる。ここで、

$$f(y_t | \phi) = (1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{D}{2\sigma_\eta^2} \left(\phi - \frac{E}{D}\right)^2\right), \quad (21)$$

$$D = (h_1 - \mu)^2 + \sum_{t=2}^T (h_{t-1} - \mu)^2, \quad (22)$$

$$E = \sum_{t=2}^T (h_t - \mu)(h_{t-1} - \mu), \quad (23)$$

である。事前分布  $f(\phi)$  は  $\phi^2 < 1$  であること反映するため、 $[-1, 1]$  の中に  $\phi$  がとどまるようにするための切断分布とする。

$\phi$  のアップデートは、まず  $\exp\left(-\frac{D}{2\sigma_\eta^2} \left(\phi - \frac{E}{D}\right)^2\right)$  に比例する確率で  $\phi$  を生成する。この確率は正規分布であるから  $\phi$  を生成することは簡単である。そして、 $(1 - \phi^2)^{\frac{1}{2}}$  のファクターを考慮するため、生成した  $\phi$  をメトロポリスヘスティング法[9]で採択する。更に、 $[-1, 1]$  の区間に入っているかどうかで棄却するかどうか判断する。

● ボラティリティ変数  $h_t$

ボラティリティ変数は尤度関数の中に含まれる変数であるが、これもマルコフ連鎖モンテカルロ法によってアップデートされなければならない。ボラティリティ変数  $h_t$  の従う確率分布を  $p(h_t)$  とするとそれは以下で与えられる。

$$p(h_t) \propto \exp\left(-\frac{h_t}{2} - \frac{\varepsilon_t^2}{2} \exp(h_t) - H_t\right). \quad (24)$$

1.  $t=1$  のとき

$$H_1 = \frac{1}{2\sigma_\eta^2} (h_1 - [\phi h_2 + \mu(1-\phi)])^2. \quad (25)$$

2.  $1 < t < T$  のとき

$$H_t = \frac{1}{2\sigma_\eta^2} (1 + \phi^2) \left( h_t - \frac{1}{1 + \phi^2} [(1 - \phi^2)\mu + (h_{t-1} + h_{t+1})\phi] \right)^2. \quad (26)$$

3.  $t=T$  のとき

$$H_T = \frac{1}{2\sigma_\eta^2} (h_T - [\phi h_{T-1} + \mu(1-\phi)])^2. \quad (27)$$

(24)式は複雑な関数形をしており、アップデートをするのは難しくなっている。ここでは、すべてのボラティリティ変数  $h_t; t=1, \dots, T$  をすべて一度にアップデートできるハイブリッドモンテカルロ法を利用する。

#### 4. ハイブリッドモンテカルロ法

本研究で用いるハイブリッドモンテカルロ (HMC) 法は1987年に Duane らによって考案された[10]。元々は格子 QCD (Quantum Chromo Dynamics) 計算においてゲージ配位を効率よく生成するために利用され、現在は格子 QCD 計算を実行するときの標準的な手法として用いられている。

ハイブリッドモンテカルロ法の特徴は、アップデートする確率変数を一度にアップデートできることで、このようなタイプのアップデートをグローバルアップデートと呼ぶ。ハイブリッドモンテカルロ法で用いられているアイデアは、分子動力学法とメトロポリス法を組み合わせることで、このことによってグローバルなアップデートを実現している。

ハイブリッドモンテカルロ法において確率分布  $P(x_1, \dots, x_n)$  に従う確率変数  $(x_1, \dots, x_n)$  を生成することを考える。最終的に計算したいものは確率変数に従うある量  $O(x_1, \dots, x_n)$  の期待値である。この期待値は以下の積



分を実行することによって求まる。

$$\langle O \rangle = \int O(x_1, \dots, x_n) P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n. \quad (28)$$

しかし、一般にはこの積分は実行できないので、マルコフ連鎖モンテカルロ法により確率分布  $P(x_1, \dots, x_n)$  に従う確率変数  $(x_1, \dots, x_n)$  を逐次生成する。そして、期待値は生成された確率変数列から

$$\bar{O} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(x_1^i, \dots, x_n^i), \quad (29)$$

として計算される。もし、変数自身の期待値が必要ならば変数に対する平均を取ればよい。

ハイブリッドモンテカルロ法では(28)式を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \int O(x_1, \dots, x_n) P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int O(x_1, \dots, x_n) \exp(\ln(P(x_1, \dots, x_n))) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int O(x_1, \dots, x_n) \exp(S(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 $S(x_1, \dots, x_n) = \ln P(x_1, \dots, x_n)$  である。更に、 $x_i$  に共役な運動量  $p_i$  を導入して

$$\langle O \rangle = \int O(x_1, \dots, x_n) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_j p_j^2 + S(x_1, \dots, x_n)\right) dx_n dp_1 \cdots dp_n / Z, \quad (31)$$

とする。ここで  $Z$  は規格化定数であるが、マルコフ連鎖モンテカルロ法においては重要でないので以下では省略する。 $O(x)$  は運動量  $p_i$  によらないので式(28)と式(31)の値は同じとなる。

ハイブリッドモンテカルロ法ではまず分子動力学法を実行する。分子動力学法ではハミルトンの運動方程式を解くことによって変数を更新し、その値を新たな変数の候補とする。

ハミルトニアン  $H(x, p)$  は以下のように定義される。

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \sum p_j^2 - S(x_1, \dots, x_n). \quad (32)$$

ハミルトニアンを利用すると式(31)は

$$\langle O \rangle = \int O(x) \exp(-H(x, p)) dx dp / Z, \quad (33)$$

と表される。

式(32)で定義したハミルトニアンを用いて以下のハミルトンの運動方程式を解く。

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \dot{p}_i \quad (34)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i \quad (35)$$

上記の方程式は一般には解析的に解けないので数値的に解く（積分する）必要がある。ハイブリッドモンテカルロ法では時間反転性と体積保存を満たしている数値積分法を用いる必要があるので、それらを満たす数値積分法である Leapfrog 法を用いる。

Leapfrog 法で  $\Delta t$  のステップサイズで式(34)と(35)を積分した式は以下となる。

$$\begin{cases} x_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = x_i(t) + \frac{\Delta t}{2} p(t) \\ p_i(t + \Delta t) = p_i(t) - \Delta t \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \\ x_i(t + \Delta t) = x_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2} p(t + \Delta t) \end{cases} \quad (36)$$

この積分を繰り返してある時間間隔分積分を行う。例えば、 $k$  回繰り返せば  $T = k\Delta t$  時間分積分を行うことになる。そして、積分後の変数  $x_i(t + T)$  を確率分布  $P(x_1, \dots, x_n)$  から生成される新しい乱数の候補とする。

式(34)と(35)のハミルトンの運動方程式はハミルトニアンを保存するのでハミルトンの運動方程式を解析的に解いた場合はハミルトニアンに変化は無

い。しかし、Leapfrog 法はハミルトンの運動方程式を近似的に積分しているので、時刻  $T$  後のハミルトニアンは積分する前のハミルトニアンと違っている。この差を  $\Delta H$  と置いて

$$\Delta H = H(x_{new}) - H(x), \quad (37)$$

とする。ここで、 $x_{new} \equiv (x_1(t+T), \dots, x_n(t+T))$  及び  $x \equiv (x_1(t), \dots, x_n(t))$  である。

ハイブリッドモンテカルロ法では新しい候補  $x_{new}$  を次の確率で採択する。

$$p = \min[\exp(-\Delta H), 1]. \quad (38)$$

もし、採択されなければ  $x$  のままとする。そして、新たにハミルトンの運動方程式を解くステップに戻り式(38)までのステップを繰り返す。これらのステップによって生成されたモンテカルロ列は確率分布  $p(x_1, \dots, x_n)$  に従うことになる。

式(38)式はメトロポリス法に対応する式であるが、一般のメトロポリス法では普通、変数の一つずつアップデートしていく。何故ならば、多数の変数を一度にアップデートしようとする式(38)の採択確率が低くなってしまって実用的ではなくなるからである。一方、ハイブリッドモンテカルロ法ではハミルトンの運動方程式を解いたあとの変数値が新しい候補として設定される。この候補は式(38)のメトロポリス法によって採択/棄却されるが、 $\Delta H$  が小さいため採択確率は高くなる。 $\Delta H$  が小さい理由は、ハミルトンの運動方程式を Leapfrog 法により近似的に解くとき、ステップサイズ  $\Delta t$  を小さくすればいくらかでも  $\Delta H$  を小さくできるからである。

このように  $\Delta H$  はいくらでも小さくできるが、小さくすればするほどいいと良いと言う訳ではない。ステップサイズ  $\Delta t$  を小さくすると時間間隔  $T = k\Delta t$  まで積分する回数  $k$  が増え、結果的に計算量が増えてしまう。従って、 $\Delta H$  の値には一番効率を良くする最適な  $\Delta H$  値が存在する。その値は採択率に変換すると60~70%に対応する値であると研究されている[11][12]。従って、Leapfrog 法を実行する時にステップサイズ  $\Delta t$  の値は採択

率60～70％を与えるように調節すればよい。尚、Leapfrog 法は  $O(\Delta t^3)$  の誤差を持つので  $\Delta t$  の2次の精度を持つ積分法である。高次の精度の積分法も存在して、その場合の最適な採択率は2次の積分法の場合よりも大きな値になる。また、本研究では用いないが Leapfrog 法よりも効率の良い2次の積分法も知られている[13]。

## 5. シミュレーション結果

本研究では、ストカスティックボラティリティモデルに基づく時系列を人工的に発生させ、その時系列データに対してハイブリッドモンテカルロ法を利用したベイズ推定を実行する。そして、得られた推定結果を時系列発生に用いたパラメータ値と比較する。時系列発生に用いたパラメータは  $\mu=-1.0$ ,  $\phi=0.98$ ,  $\sigma_v=0.1$  である。これらの値を(13)式にインプットして時系列を発生させる。時系列は  $T=2000$  まで発生させた。図1は  $T=2000$  までの時系列データの1つをプロットしたものである。図からデータ  $y_t$  が

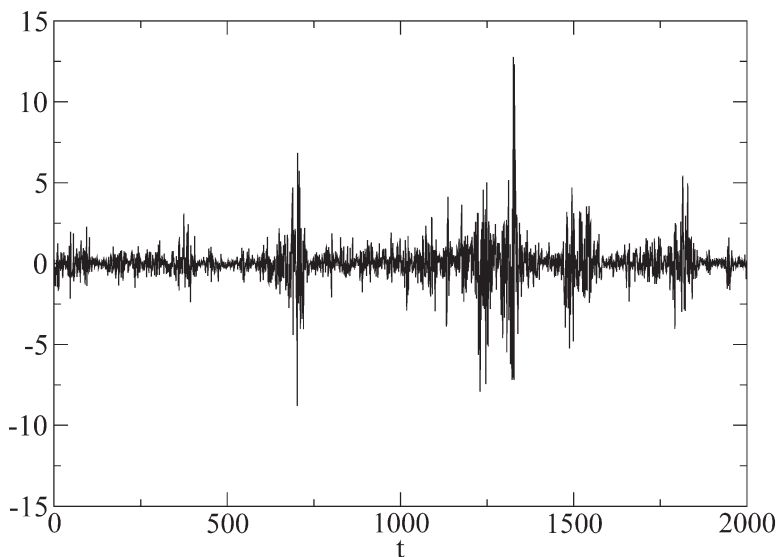


図1 人工的に生成したストカスティックボラティリティモデルの時系列。

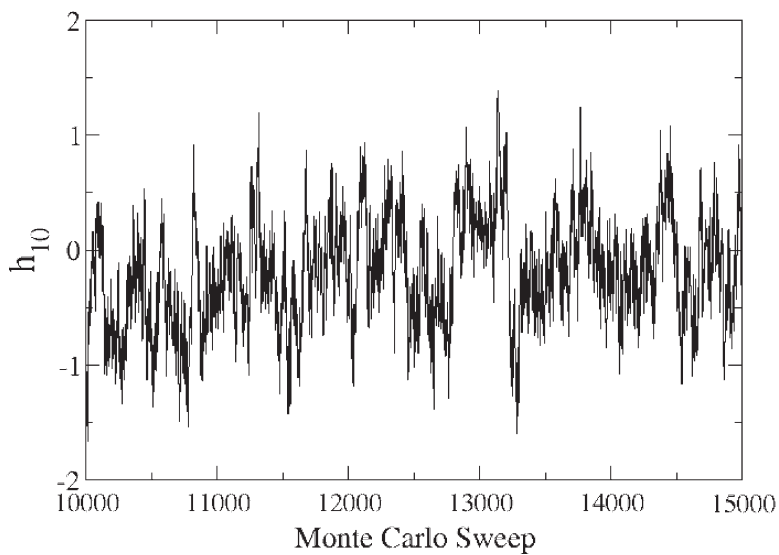


図2 メトロポリス法によるボラティリティ変数  $h_{10}$  のモンテカルロ列。

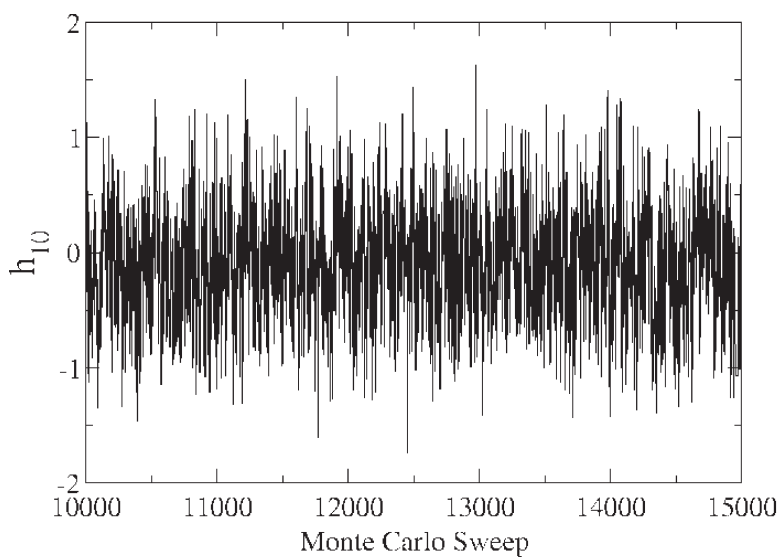


図3 ハイブリッドモンテカルロ法によるボラティリティ変数  $h_{10}$  のモンテカルロ列。

大きくなると大きい期間が続き、小さくなると小さい期間が続くというボラティリティクラスティングの様子が見て取れる。

以下では図1の時系列データに対してハイブリッドモンテカルロ法及びメトロポリス法を実行した結果を示す。

図2及び図3はそれぞれメトロポリス法とハイブリッドモンテカルロ法によるボラティリティ変数  $h_{10}$  のモンテカルロ列をプロットしたものである。モンテカルロ列の最初の10000データは初期値依存の影響を受けている可能性があるので省いてある。ボラティリティ変数は2000個の時系列データに対して2000個存在するが、ここでは  $t=10$  番目の  $h_{10}$  のみを代表してプロットしてある。

図2と3を比較すると、明らかにハイブリッドモンテカルロ法によるモンテカルロ列の方が時系列間の相関が小さいように見える。実際、自動相関関数 (Autocorrelation function) を計算するとハイブリッドモンテカルロ法の方がメトロポリス法よりもずっと早く相関小さくなることを示して

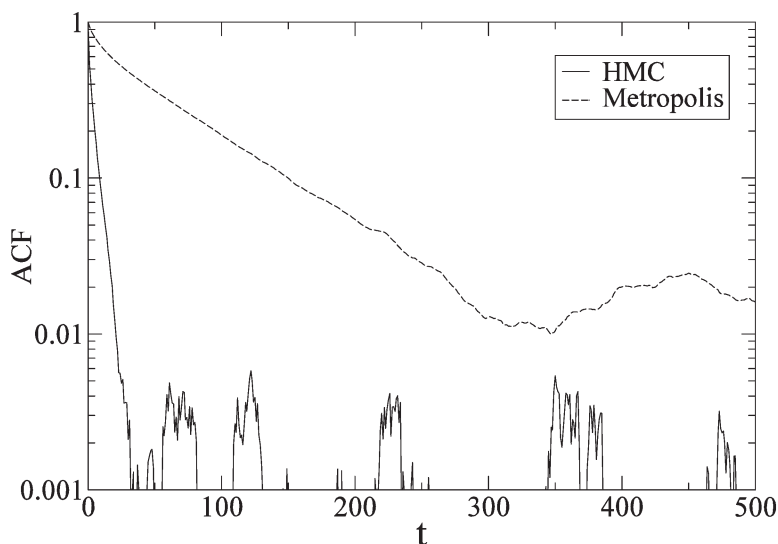


図4 ハイブリッドモンテカルロ法とメトロポリス法による  $h_{10}$  の自動相関関数の比較。

いる(図4)。相関が小さいことは独立な値を早く生成できることを意味するのでハイブリッドモンテカルロ法の方が効率よくボラティリティ変数をアップデートしていることがわかる。尚、ここで計算した自動相関関数は以下で定義される量である。

$$ACF(t) = \frac{1}{(N-t)\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{N-t} (O_i - \bar{O})(O_{i+t} - \bar{O}). \quad (39)$$

ここで、 $\sigma^2$  は  $O_i$  の分散である。

上記ではボラティリティ変数の中で  $h_{10}$  を代表として計算したが、他のボラティリティ変数も似た傾向を示す。図5は  $h_{10}$ ,  $h_{30}$ , 及び  $h_{100}$  に対する自動相関関数をプロットしたものであるが3つとも似た振る舞いをしている。

さて、ハイブリッドモンテカルロ法はメトロポリス法と比べてボラティリティ変数を効率よくアップデートしていることがわかったが、他の変数ではどうだろうか。図6と図7はそれぞれメトロポリス法とハイブリッド

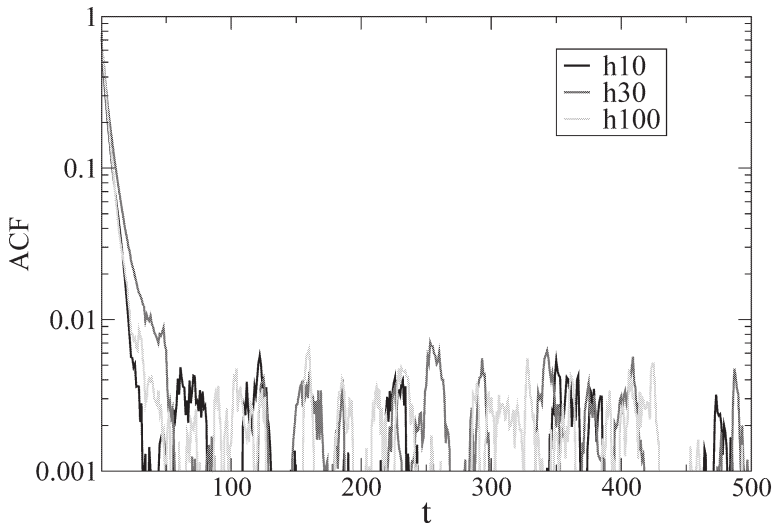


図5  $h_{10}$ ,  $h_{30}$  及び  $h_{100}$  に対する自動相関関数の比較。

モンテカルロ法による変数  $\phi$  のモンテカルロ列である。図 6 と図 7 を比較するとモンテカルロ列の相関の傾向は似ているように見える。図 8 は変数  $\phi$  の自動相関関数をメトロポリス法とハイブリッドモンテカルロ法と比較したものだが、2つの自動相関関数は非常に良く似ている。このことは、変数  $\phi$  に対してはハイブリッドモンテカルロ法の方が効率が良いとは言えないことを示している。

図 9 と図 10 はそれぞれメトロポリス法とハイブリッドモンテカルロ法による変数  $\sigma_\eta^2$  のモンテカルロ列である。図 9 と図 10 を比較すると変数  $\phi$  の場合と同様に 2つのモンテカルロ列の相関傾向は似ているように見える。図 11 は変数  $\sigma_\eta^2$  の自動相関関数をプロットしたものだがメトロポリス法とハイブリッドモンテカルロ法の自動相関関数は非常に良く似ている。

図 12 と図 13 はそれぞれメトロポリス法とハイブリッドモンテカルロ法による変数  $\mu$  のモンテカルロ列である。この場合も、2つのモンテカルロ列の相関傾向は似ているように見える。しかし、実際に自動相関関数を図 14

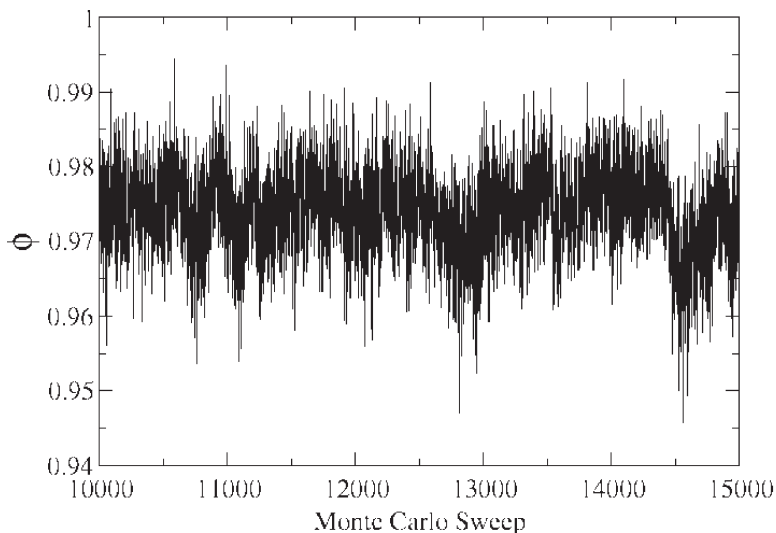


図 6 メトロポリス法によるボラティリティ変数  $h_{10}$  のモンテカルロ列。



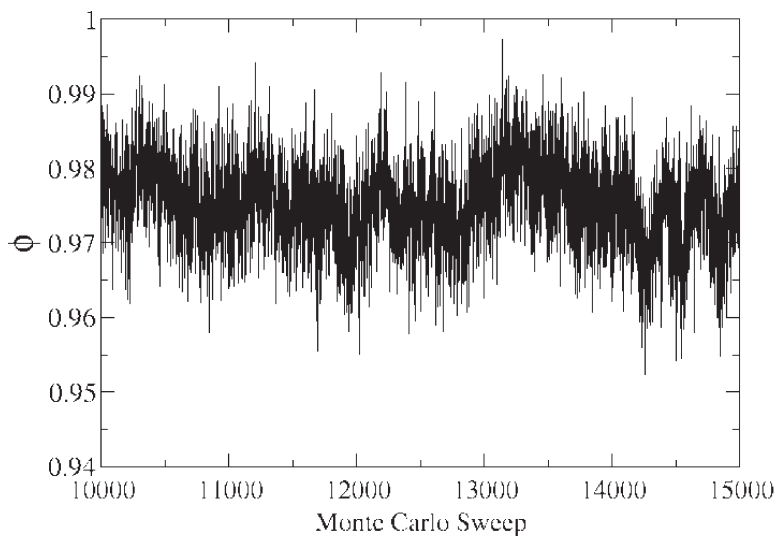


図7 ハイブリッドモンテカルロ法によるボラティリティ変数  $h_{10}$  のモンテカルロ列。

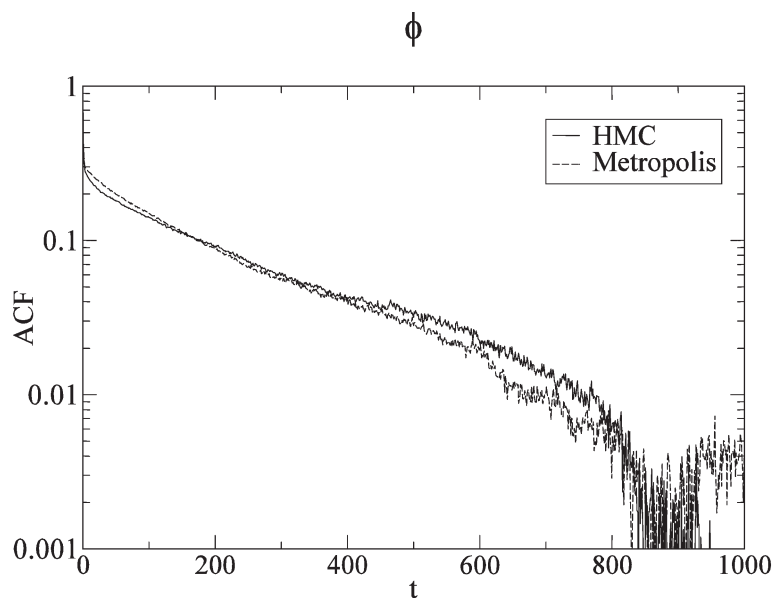


図8 ハイブリッドモンテカルロ法とメトロポリス法による変数  $\phi$  の自動相関関数の比較。

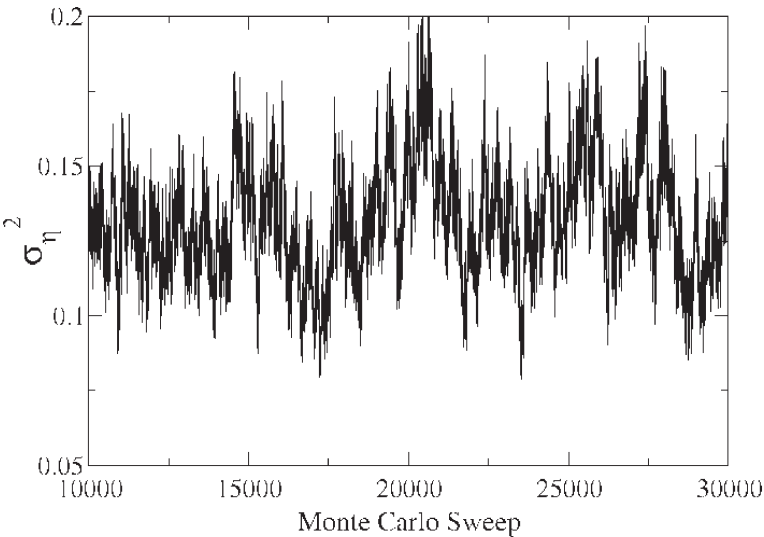


図9 メトロポリス法による変数  $\sigma_{\eta}^2$  のモンテカルロ列。

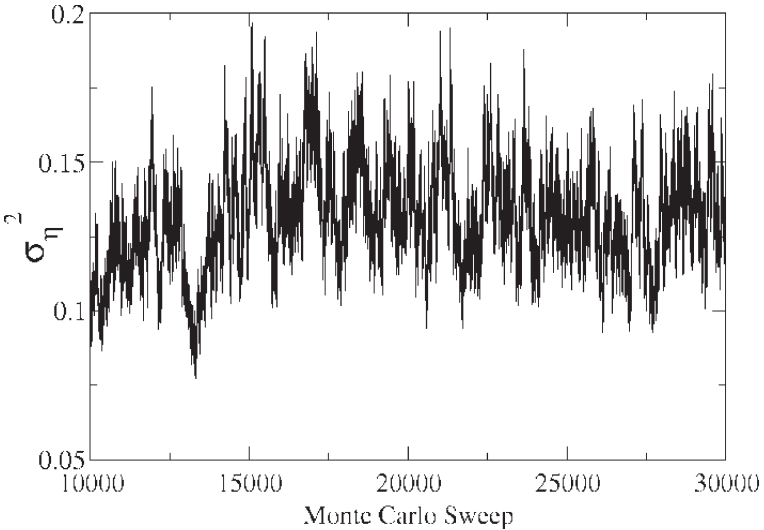


図10 ハイブリッドモンテカルロ法による変数  $\sigma_{\eta}^2$  のモンテカルロ列。

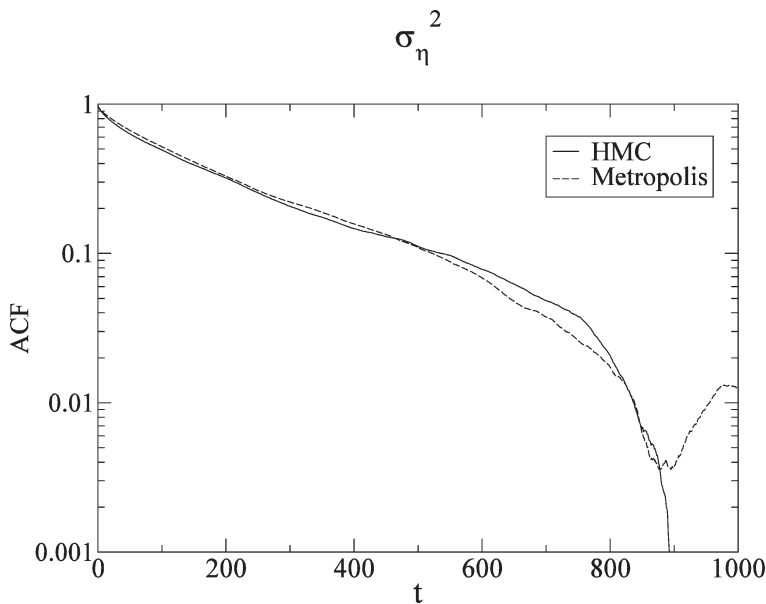


図11 ハイブリッドモンテカルロ法とメトロポリス法による変数  $\sigma_\eta^2$  の自動相関関数の比較。

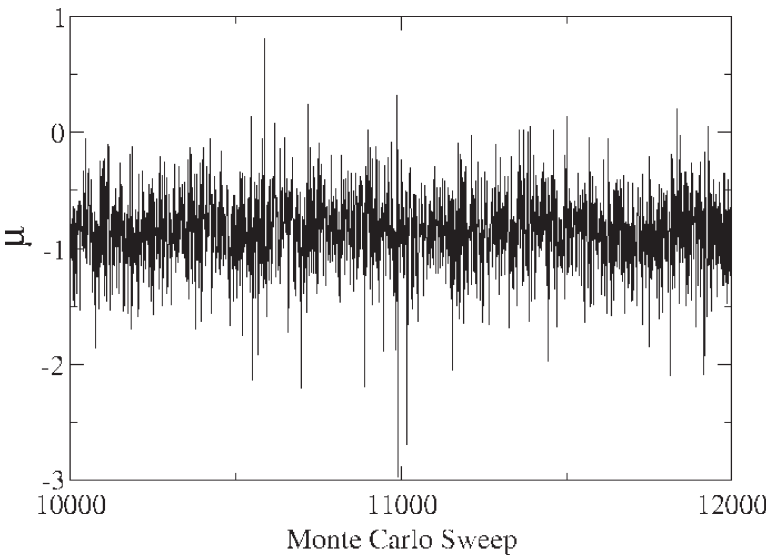


図12 メトロポリス法による変数  $\mu$  のモンテカルロ列。

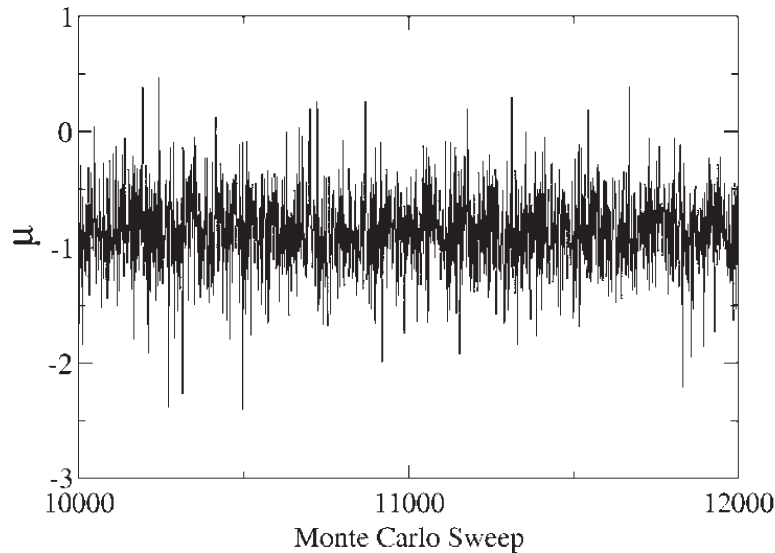


図13 ハイブリッドモンテカルロ法による変数  $\mu$  のモンテカルロ列。

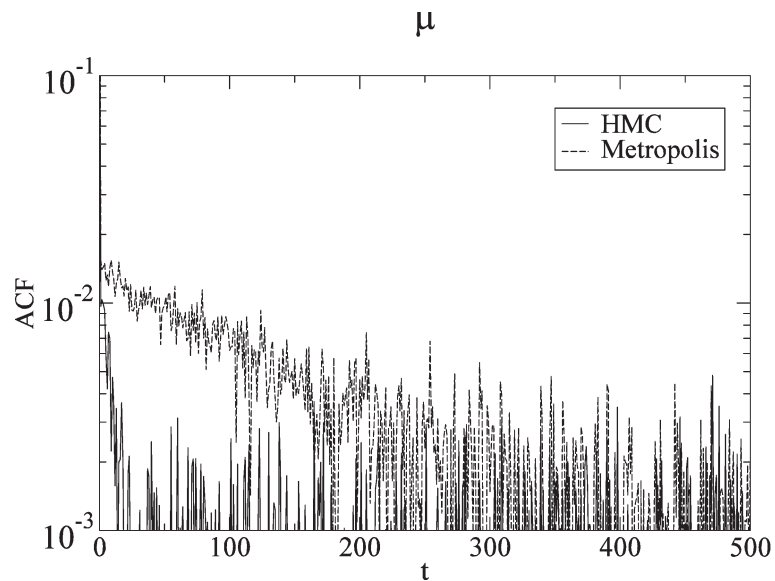


図14 ハイブリッドモンテカルロ法とメトロポリス法による変数  $\mu$  の自動相関関数の比較。

でプロットして見ると違いが見られ、ハイブリッドモンテカルロ法の方が早くモンテカルロ列の相関が小さくなっている。このこと自体はハイブリッドモンテカルロ法の方が効率の良いことを示している。しかし、自動相関関数の値を見ると両方とも  $t$  が小さいところで既に  $10^{-2}$  以下という非常に小さな値になっているので、実際には両方の手法とも変数  $\mu$  に対しては効率的であるということができる。

表1はハイブリッドモンテカルロ法による推定結果である。インプット値はストカスティックボラティリティモデルの人工的な時系列を生成するときにインプットした値を表している。推定値は図1の時系列データを含めて20個の人工的な時系列を生成し、それらの時系列データに対して推定を行った結果の平均値である。推定値の（ ）の中の数値は20個の推定結果から計算した統計誤差を示している。これらの推定値はインプット値に非常に近く、ハイブリッドモンテカルロ法によるベイズ推定がうまく機能していることを示している。

表1 ハイブリッドモンテカルロ法による推定結果

	$\phi$	$\sigma_{\eta}^2$	$\mu$
インプット値	0.98	0.1	-1.0
推定値	0.9772 (11)	0.1070 (42)	-1.064 (64)

6. まとめ

本研究では、ボラティリティ変数に対するマルコフ連鎖モンテカルロ法においてハイブリッドモンテカルロ法を用いてストカスティックボラティリティモデルのベイズ推定を実行した。メトロポリス法と比較したとき、ボラティリティ変数に対してはハイブリッドモンテカルロ法によるモンテカルロ列の方が相関が小さく、ハイブリッドモンテカルロ法の方が効率的にボラティリティ変数をアップデートしていることがわかった。しかし、その他の変数について比較したとき、変数  $\mu$  に対しては相関が小さくなる傾向が見られたが、その他の変数  $\phi$  と  $\sigma_{\eta}^2$  については改善が見られなかった。

ハイブリッドモンテカルロ法による推定結果はインプット値と比較するとよく一致しており、ハイブリッドモンテカルロ法による推定がうまくいっていることを示している。

メトロポリス法との比較から、ハイブリッドモンテカルロ法がすべての変数において相関を小さくしている訳ではないので、ハイブリッドモンテカルロ法の効率が非常に良いとは言い切れない。しかし、推定結果はインプット値とよく一致しているので、ハイブリッドモンテカルロ法はストカスティックボラティリティモデルにおけるマルコフ連鎖モンテカルロ法の手法の一つとして利用できると結論付けられるであろう。

#### 参 考 文 献

- [1] 例えば, R. Cont, “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”, *Quantitative Finance* 1 (2001) 223-236.
- [2] R. Engel, “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of the UK inflation,” *Econometrica* 50 (1982) 987-1008.
- [3] T. Bollerslev, “Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity”, *J. Econometrics* 51 (1986) 307-327.
- [4] Metropolis et al., “Equations of State Calculations by Fast computing Machines”, *Journal of Chemical Physics*, 21 (1953) 1087-1092.
- [5] E. Jacquier, N. Polson and P. E. Rossi, “Baysian Analysis of Stochastic Volatility Models”, *Journal of Business & Economics Statistics* 12 (1994) 371-389.
- [6] L. Bauwens and M. Lubrano, “Bayesian inference on GARCH models using the Gibbs sampler”, *Econometrics J.* 1, (1998), C23-C46.
- [7] T. Nakatsuma, “Bayesian analysis of ARMA-GARCH models, *Journal of Econometrics*, 59 (2005) 57-69.
- [8] T. Takaishi, “Bayesian estimation of GARCH model by hybrid Monte Carlo”, *Proceedings of the 9th Joint Conference on Information Sciences* 2006. <http://www.atlantis-press.com/publications/aisr/jcis-06/>
- [9] W. K. Hastings, “Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications”, *Biometrika* 57 (1970) 97-109
- [10] S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton and D. Roweth, “Hybrid Monte

- Carlo”, Physics Letters B195, (1987) 216-222.
- [11] T. Takaishi, “Choice of Integrator in the Hybrid Monte Carlo Algorithm”, Computer Physics Communications 133 (2000) 6-17.
- [12] T. Takaishi, “Higher Order Hybrid Monte Carlo at Finite Temperature”, Physics Letters B540 (2002) 159-165 2002.
- [13] T. Takaishi and Ph. Forcrand, “Testing and tuning symplectic integrators for Hybrid Monte Carlo algorithm in lattice QCD”, Physical Review E73 (2006) 036706.
- [14] 高石 哲弥, 「ハイブリッドモンテカルロ法による GARCH モデルのベイズ推定」 広島経済大学研究論集 第29巻第4号 (2007年3月) 25-37
- [15] 高石 哲弥, 「インポートランスサンプリングによる株価経路の生成」 広島経済大学研究論集 第28巻第4号 (2006年3月) 22-35
- [16] 渡辺 敏明, 「ボラティリティ変動モデル」 朝倉書店