

児童・生徒の数学的活動を促す授業づくりに関する研究 (2)

——平面図形の教材研究を通して——

平岡 賢治*・野本 純一**

1. はじめに

本研究は、児童・生徒の数学的活動を促す授業づくりに関するものである。

久保 (2013) が中学校教師に行った調査によれば、多くの教師が数学的活動を促し、問題解決を図る授業を理想としながらも、日々の授業で、教師が思ったように授業展開ができていないことを明らかにしている。

筆者達は授業づくりに関する研究 (平岡・野本 (2015) など) をもとに、教師が児童・生徒の数学的方略を促す授業づくりを行うための方略として、表1の「教材の問題理解に関する方略」(以下「方略」と略記) を提案した (平岡・野本 (2020))。

さらに、上記の「方略」を用いて、小学校算数科・中学校数学科の授業における、児童・生徒の数学的活動を促す手立てを具体化するため

表1 教材の問題理解に関する方略 (平岡・野本, 2020)

【視点1】 児童・生徒が数学的な知識・概念や性質を構成することにつながる既習の知識や表現、イメージなどを引き出す問題場面をつくること

- 導入で扱う教材の問題場面では、
 - ・今までの学習で取り組んだことのある問題場面や表現を基に作り直すこと
 - ・既習の知識に関連するシンプルな教材を扱うこと
 - ・実生活につなげること
- などによって、児童・生徒が問題場面への関心や意欲を高めるとともに理解を深める教材を扱うこと

【視点2】 児童・生徒が問題場면을数理的に捉える活動や、数学的な問題を設定したり、それを解決したりする活動を具体的にすること

- 問題場면을数理化する活動では、
 - ・具体的な操作
 - ・グラフや表、図などによる表示
 - ・帰納的な考え方
- などの数学的活動を取り入れ、直観的思考などを働かせること
- 数学的に表現した問題を設定し、それを解決したりする活動では、
 - ・問題場면을数理化する活動で得られた結果と既習内容との関連
 - ・式などを使って表現することなどの数学的不変性の考察
- などを通して、操作活動や数学的な考察の結果を意識化し、図や式・言葉などにより、反省的思考を働かせ、数学的な問題を設定したり、それを解決したりすること

【視点3】 児童・生徒が【視点1】・【視点2】での活動をさらに深めるために、発展的・統合的な問題場面などをつくり、問題場面から広がる数学的活動を具体的にすること

- 数学的活動をさらに深める場面では、
 - ・図形・式・数を数学的性質の不変性の視点から、学習内容の範囲を広げて考えること
 - ・一見違うと思われるものの中に不変性を見て、統合的に今までの学習内容を振り返ること

* 広島経済大学教養教育部教授

** 長崎県佐世保市立早岐中学校教諭

に、次の①、②の方法で研究を進めている。

- ①小学校算数科の4領域「数と計算」,「図形」,「変化と関係」,「データの活用」ならびに、中学校数学科の4領域「数と式」,「図形」,「関数」,「データの活用」の各領域において、「方略」の各視点を基にした教材研究や授業実践を行う。
- ②「方略」の各視点を基にした教材研究や授業実践を通して、児童・生徒の数学的活動を促す手立てを顕在化するとともに、他の授業や教師教育などに活かし、手立ての修正などを図りながら、より有効な手立てに練り上げる。

例えば、は、小学校算数科・中学校数学科の数と式に関する事例研究では、児童・生徒の数学的活動を促す手立てとして、次の3つを顕在化した平岡・野本（2020）。

- ・数値による操作を幾つか行う活動が、児童・生徒が問題場面を構成する要素やそれらの間の関係を見出す数学的活動を促すこと
- ・数値による操作と文字を使った式による数学的处理を対応させることが、児童の既習の数学的知識を授業としての数学的知識につなげることを促すこと
- ・類似な問題を幾つか解く活動が、問題場面における数量の関係の一般化を見出す数学的活動を促すこと

本稿は上記の目的を達成するための研究の一部であり、中学校数学の教科書の「平面図形」の単元の中で、作図の場面を取り上げる。中学校学習指導要領（平成29年告示）解説（文部科学省（2018））では、「作図の方法を一方的に与えるのではなく、図形の対称性や図形を決定す

る要素に注目して作図の方法を見だし、その方法を図形の性質や関係に基づいて説明する活動を大切にすると述べている。しかし、実際の授業では図形の性質を利用するというよりも、いわゆる“かき方指導”に終始することが多い。例えば、図1のように、三角形の紙を折る場面から線分の垂直二等分線の意味に着目し、作図の方法を利用する調査問題の正答率は45.0%と低い（国立教育政策研究所、2009）。これは、図形の対称性や図形を決定する要素に注目して作図の方法を見だしたり、見いだした作図の方法をいろいろな場面に活用したりすることを示唆している。

そこで、本稿では、作図の場面を取り上げ、図形の対称性や図形を決定する要素に注目するために、折り紙を折る活動を通して作図の方法を考えさせることを「方略」の各視点を基にして教材研究を行う。

2. 具体的事例—基本的な作図方法（中学校1年生）—

図2（藤井斉亮ほか（2016））は、中学1年の垂直二等分線の作図の問題である。教科書ではページのかどを折るという操作を通して、折り目の線が線分ABの垂直二等分線であることに気づかせた上で、垂直二等分線を作図する方法を考えさせようとしている。

- 岡崎・岩崎（2003）は、作図の特性として、
- ・かたちを喚起し、性質を顕在化する機能
 - ・命題構成機能
 - ・仮定—結論の理解を促す機能
 - ・経験的認識を論理的認識へ変容させる機能
 - ・定義の認識を高める機能

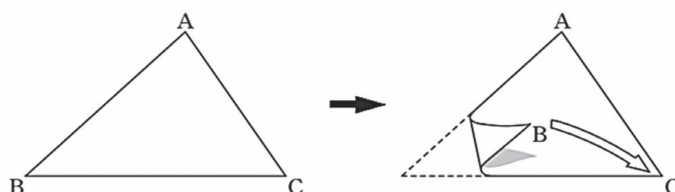
があるとしている。ここで、「かたちを喚起し、性質を顕在化する機能」は、筆者達の「視点1」に対応するものと考えることができる。

中学1年の作図学習において、

図形の性質の意識化、道具としての性質の

(2) 次の図の $\triangle ABC$ を、頂点Bが頂点Cに重なるように折ったときにできる折り目の線を作図しようとしています。

この作図について述べた下のアからエまでのの中から、正しいものを1つ選びなさい。



ア 辺BCの垂直二等分線を作図する。

イ 頂点Aから辺BCへの垂線を作図する。

ウ $\angle A$ の二等分線を作図する。

エ この折り目の線は作図できない。

図1 平成21年度 全国学力・学習状況調査 数学A [4](2)

▶ 垂直二等分線作図について考えてみよう



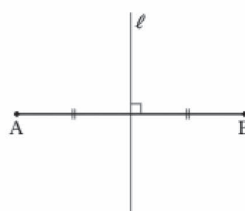
調べてみよう

右の図で、ページのかどを点Aとします。
線分ABをかき入れ、その両端の点A、Bが
重なるように折ってみましょう。
折り目の線はどんな線といえるでしょうか。



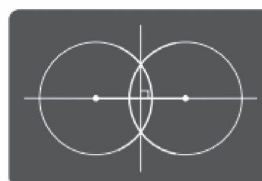
上のQの折り目の線は線分ABの垂直二等分線である。この垂直二等分線を作図する方法を考えてみよう。

線分ABの垂直二等分線は、線分ABの対称の軸であり、2点A、Bは、対応する点となる。



右の図をもとにして、垂直二等分線を作図する方法を考えることができる。

右の図と、154ページの図②を比べてみよう。



図②

活用、関係として対象化を促す学習場面を積極的に取り入れ、中学2年から学習する論証幾何へ橋渡しをすることが求められる。

筆者達は、図形の性質の意識化を促すために、折り紙で図形を折る操作活動をできるだけ取り入れる。小学校の算数では、図3（清水静海ほか（2019a））・図4（清水静海ほか（2019b））のように三角形など多角形づくりの場面で折り紙を折る操作があり、これらの活動から図形の性質を帰納的に理解できるようにしている。他にも、分数や割り算の学習の場面で紙を折る活動など児童・生徒にとって慣れ親しんだ操作である。これらの経験は、折り紙の操作活動と数や数の計算とを関連付ける操作活動であり、[視点1]を促す場面として重要であり、中学校数学の学習に大きな影響を与えるものである。

そこで、筆者達が操作的活動を通した作図の授業実践の経験（平岡（1988）・野本（2014））を踏まえ、

折り紙の1辺を底辺とする二等辺三角形や正三角形づくりを通して、それらの図形のイメージを想起するとともに、その分析から線分の垂直二等分線の基本的な性質を対象化した上で、線分の垂直二等分線に関する作図の

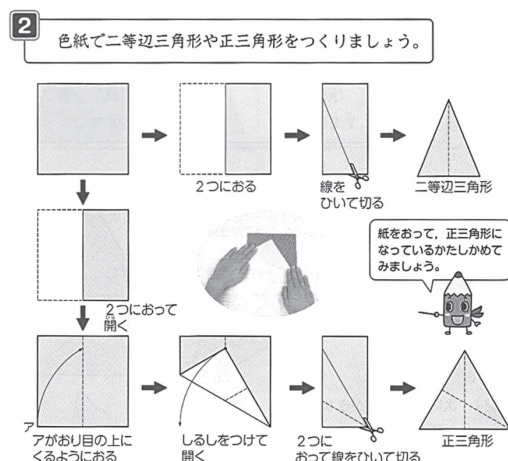


図3 啓林館 わくわく算数 3下

14 円と正多角形

④ 紙に円をかくて下の図のように折り、直線ABにそって切り、紙を広げて⑤や⑥の形をつくってみましょう。

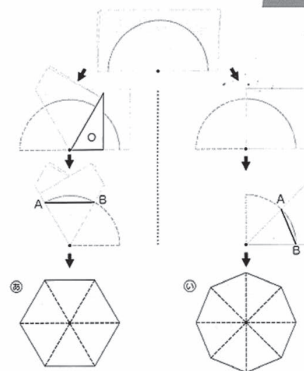


図4 啓林館 わくわく算数 5

方法を考えさせること

をねらいとして、児童・生徒の数学的活動を促す授業づくりのために「方略」を用いて教材研究を行う。

2.1 折り紙の1辺を底辺とする二等辺三角形や正三角形づくり

[視点1]の活動

既習の知識に関連する操作活動や問題場面を通して、それぞれが学んできた内容やそのとき獲得した知識を想起するきっかけを設定する。導入場面で扱う教材を通して、本時の問題を理解し、既習の数学的知識や性質から新たな数学的知識や性質を導き、さらに数学的な視点で考える場面として、折り紙を配布し、折り紙の1辺を底辺とする二等辺三角形を、コンパスを使わずに描かせる。すると、多くの生徒が図5のような二等辺三角形を幾つか描く。

また、セロファンの折り紙を配布し、生徒に底辺を1辺とする二等辺三角形を描かせるとともに、生徒個々が描いたセロファンの折り紙を

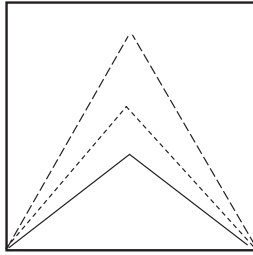


図5 折り紙に定規と筆記用具で描いた二等辺三角形

重ね、底辺を1辺とする二等辺三角形は一つではなくたくさんあることを共有することも考えられる。

この活動を通して、

- ・二等辺三角形の頂点は、折り紙の1辺の両端から同じ長さのところにある
- ・二等辺三角形を2つ、3つと描いたとき、これらの二等辺三角形の頂点は1つの直線上に並んでいる

などのような気づきを生徒達の言葉で発表させ、[視点2]の問題場面を数学化する活動につなげる。

[視点2]の活動

○問題場면을数学化する活動

[視点1]における生徒の気づきから、

- ・頂点の集まりの直線は底辺と交わったときにできる角の大きさは 90°
- ・頂点の集まりの直線は底辺と垂直に交わっている

のように、より数理的な視点で捉えさせていく。

○数学的に表現した問題を設定したり、それを解決したりする活動

以上の気づきをもとに、

- ・頂点の集まりの直線は底辺と垂直に交わり、底辺を2つに分けている

つまり、頂点の集まりの直線は底辺の垂直二等分線であることを予想させ、そのことを確かめる方法を生徒に考えさせる。生徒からは、線を結びその線を折ればいいという考えが出てくるだろう。

このように、生徒の予想や考えをもとに、図6のように、描いた頂点を結び、その線を折らせる。

図6の線を折る活動から、

- ・正方形を半分に折ることができた
- ・底辺の両端が重なった
- ・底辺の両端が重なったから、頂点の集まりの直線は底辺を2つに分けるし、底辺と垂直に交わっている

などの発表が出て、予想を確かめることができるであろう。

また、以上の活動から、図7のように、

- ・折り紙を半分に折り、折った線の上に1つ点を取り、その点と底辺の両端を結べば二等辺三角形ができる

という気づきが出てくることを期待する。

この気づきから、考える対象が正方形の1辺を底辺とする二等辺三角形をつくることから、正方形の1辺を底辺とする二等辺三角形の頂点の設定に関する問題に対象化される。

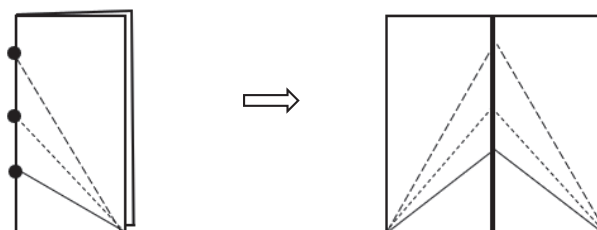


図6 頂点の集まりの線を折って、予想を確かめること

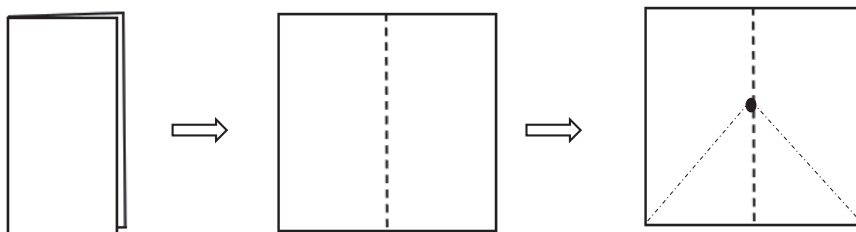
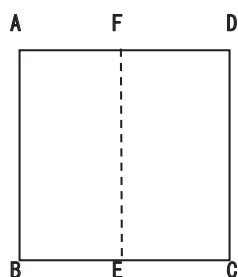


図7 折り紙を半分に折り、折った線の上に点を取り、二等辺三角形をつくること

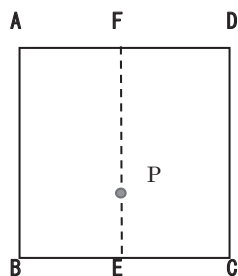
実際に図7の操作に取り組ませることにより、底辺の両端を重ねて紙を折る活動が、両端からの距離が同じ線を引き続けていることに気づかせたり、または教師による説明で理解させたりするとともに、

図7から、折り目の線分上ならばどこに点を

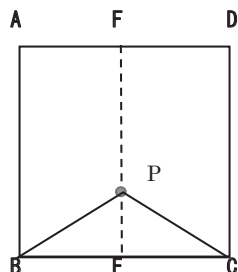
置いても、その点と折り紙の左下と右下を結べば二等辺三角形をつくることができるということに帰着させる。また、記号や数学の用語を使って、図8のように、正方形の1辺を底辺とする二等辺三角形の手順を説明させることもできる。



左の図のように、正方形 ABCD の折り紙を半分に折って、折り目を付け、その折り目を線分 EF とする。



左の図のように、線分 EF 上の一つの点を P とする。



左の図のように、点 P と点 B、点 P と点 C をそれぞれ結ぶ。

図8 折り紙の1辺を底辺とする二等辺三角形の作り方

[視点3] の活動

[視点2] までの二等辺三角形作りの広がりとして、「正方形の1辺を底辺とする正三角形を作るには？」という課題を設定する。

- ・正三角形の3辺の長さは同じである
 - ・正三角形は二等辺三角形と同じ仲間である
- などの気づきを発表させ、既習の基本的な性質を想起させる。また、図8の二等辺三角形の作り方を基に考えるならば、
- ・正三角形についても点Pは線分EF上にある
 - ・しかし、その点Pは二等辺三角形のようにたくさんあるわけではなく、正三角形の3辺の長さが等しくならなければならないか

ら、一点しかない

などのような気づきを発表させ、課題を、条件を満たす点Pの決め方に対象化していく。

先ほどの気づきから、

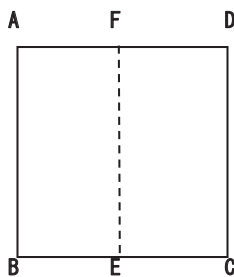
線分BPの長さと線分BCの長さが等しい

↓

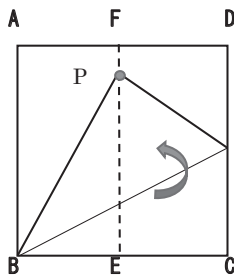
線分BCを動かして、点Cと線分EFと重なる点が点Pである

という見通しを立て、折り紙を折る操作を行うとともに、図9のように、記号や数学の用語を使って、正方形の1辺を底辺とする正三角形の手順を説明させる。

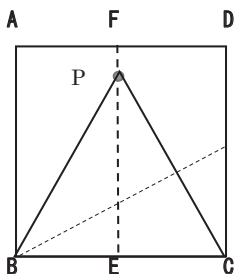
なお、図9の2番目の手順について、「線分PBは、線分BCを手順に沿って折った折り目



左の図のように、正方形ABCDの折り紙を半分に折って、折り目を付け、その折り目を線分EFとする。



左の図のように、右下の頂点Cを線分EF上に重ね、重なった点をPとして、元の正方形に戻す。



左の図のように、点Pと点B、点Pと点Cをそれぞれ結ぶ。

図9 折り紙の1辺を底辺とする正三角形の作り方

を線対称の軸として、対称移動したものである」というように、移動という言葉で説明できることも補足する。

2.2 折り紙を折るという操作を基にした線分の垂直二等分線の作図の方法

(1) のように、折り紙を折るという操作を十分にとり、二等辺三角形や正三角形のイメージや、その分析を通した線分の垂直二等分線の基本的な性質を想起した上で垂直二等分線の作図の方法について考えさせる。

なお、あらかじめ、作図における定規とコンパスについて、次の約束をする。

- ・定規は直線をひく
- ・コンパスは長さをはかる。コンパスは円を描く

[視点2] の活動

○問題場面を数学化する活動

(1) で取り組んだ図8の折り紙の1辺を底辺とする二等辺三角形の作り方について、実際に折り紙を折りながら振り返る。その上で、「実際に折り紙を折らないで、折り紙の1辺を底辺とする二等辺三角形を作図するためには、どのように作図すればよいだろうか?」という課題を提示する。生徒達は、図8の二等辺三角形の作り方を通して、

- ・点Pは必ず線分EF上にある
- ・線分EFは線分BCに垂直である
- ・線分EFは線分BCに垂直で、線分BCを二つに分ける

などの気づきをもとに、線分BCに垂直であり、線分BCの長さを二等分する直線を作図するという課題に対象化される。なお、ここで、このような直線のことを線分BCの垂直二等分線ということを説明する。

○数学的に表現した問題を設定したり、それを解決したりする活動

対象化したことを解決するために、実際の作図の仕方を考える。図10のように、折り紙を折って、正方形の1辺を底辺とする二等辺三角形の作り方のイメージをもとに、

- ・辺BCを底辺とする二等辺三角形を作図すればよい
- ・二等辺三角形は2辺の長さが同じだから、2点A, Bに針を置いて、幅が同じ円を描いて、その二つの円の交点を結んだのが、線分BCの垂直二等分線である

などの気づきをもとに、線分BCの垂直二等分線の作図を行い、その方法が正しいことを確認するとともに、方法を振り返る。

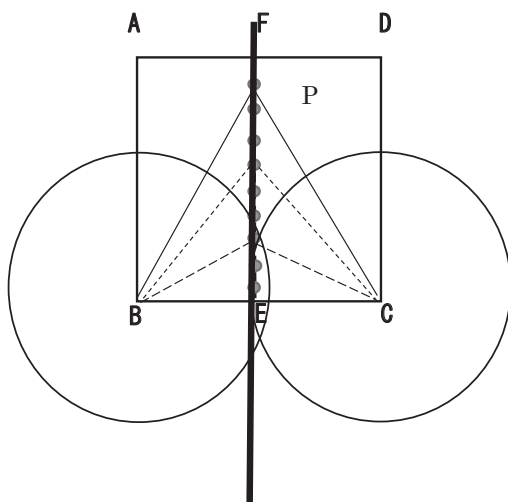


図10 折り紙を折ることのできた二等辺三角形のイメージを基にした線分BCの垂直二等分線の作図

[視点3] の活動

[視点2] の折り紙を折ることのできた二等辺三角形のイメージを基にした線分BCの垂直二等分線の作図の広がりとして、「図11のように折り紙を折ったときの作図はどのようにすればよいか」という課題を設定する。図10と比較して、

- ・点Pと2点B, Cを結んでできる三角形は、二等辺三角形ではない
- ・2点A, Bに針を置いて、幅が異なる円を描いて、その二つの円の交点を結んだのが求めるものである

などの気づきをもとに、実際に作図を行い、その方法が正しいことを確認するとともに、方法を振り返る。

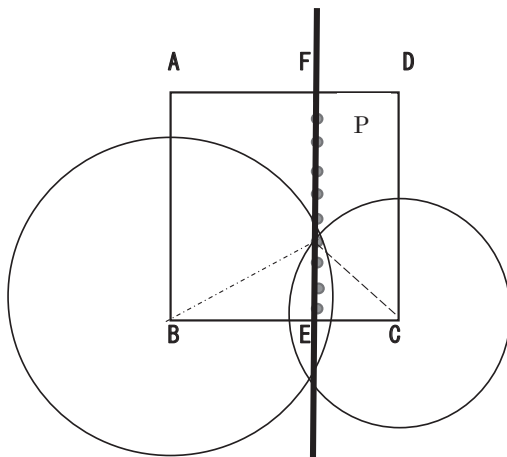


図11 折り紙を半分に折らなかったときの折り目の作図

3. 「方略」の各視点を基にした教材研究を通して

本稿では、筆者達が提案する「教材の問題理解に関する方略」を基にした児童・生徒の数学的活動を促す教材研究を中学校平面図形の題材で取り組んだ。

実際に筆者の一人が上記の教材研究をもとにした授業を行った。折り紙の1辺を底辺とする二等辺三角形をいくつか描いたことによる気づきや、その確認のために折り紙を折る操作を行うことで、視覚的全体的な図形の認識に立ち戻りながら、図形の更なる認識を深め、生徒を作図の本質である垂直二等分線の性質へ促した。また、線分の垂直二等分線に関する作図の方法を折り紙で図形を折る操作と対応させながら説

明できるようになっており、生徒は、単に言葉だけの理解ではなく、実感が伴う理解に繋がっている。以上から、「方略」を用いた教材研究は、児童・生徒の数学的活動を促す授業を行う上で有益であることが示唆される。

また、今回の教材研究から、図形領域に関する児童・生徒の数学的活動を促す手立てとして、

- ・図形に関して、図形を描いたり、折り紙を折ったりするなどの操作活動を十分にすることが、図形の性質や経験的・帰納的な思考を促すこと
- ・具体物による操作と対応させながら数学的な作図方法を説明することが、図形の定義や性質の関係性など、図形に対する認識を促すこと

の2つの手立てを顕在化することができる。これらは図形に関する他の問題でも十分に活用されるものである。

今後も、小学校や中学校の教科書の問題を中心に、「方略」を基にした児童・生徒の数学的活動を促す授業づくりやその方法の顕在化に取り組んでいきたい。

参 考 文 献

- 岡崎正和・岩崎秀樹 (2003), 「算数から数学への移行教材としての作図—経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践—」, 『数学教育学論究』, 80, pp. 3-27
- 久保良宏 (2013), 「中学校数学科における授業タイプに関する研究—コミュニケーションに焦点をあてて—」, 『日本数学教育学会誌』, 95(1), pp. 2-10
- 国立教育政策研究所 (2009), 『平成21年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』
- 清水静海ほか (2019a), 『わくわく算数 3下』, 啓林館, p. 6
- 清水静海ほか (2019b), 『わくわく算数 5』, 啓林館, p. 188
- 野本純一 (2014), 「操作的活動を通した作図の授業

- 実践—折り紙を折ることの図形的意味を通して—, 『日本数学教育学会誌, 臨時増刊, 総会特集号』, 96, p. 240
- 平岡賢治 (1988), 「中学1年における図形指導—平面図形の場合」, 『広島大学附属中学校 研究紀要』, 35, pp. 11–18
- 平岡賢治・野本純一 (2020), 「児童・生徒の数学的活動を促す授業づくりに関する研究—数と式の教材研究を通して—」, 『広島経済大学研究論集』, 43(2), p. 43–54
- 平岡賢治・野本純一 (2015), 「Shulman の「翻案」を取り入れた数学科の授業づくりに関する考察—授業におけるインフォーマルな活動に視点をあてて—」, 『日本数学教育学会秋期研究大会発表収録』, 48, pp. 459–462
- 藤井齊亮ほか (2016), 『新編 新しい数学1』, 東京書籍, p. 157
- 文部科学省 (2018) 「中学校学習指導要領 (平成29年告示) 解説 数学編」, 日本文教出版, p. 157