広島経済大学研究論集
第40巻第２号　2017年９月
http://dx.doi.org/10.18996/kenkyu2017400204

教科書の問題理解に関する方略を基にした授業づくりに関する考察

平岡　賢治*・野本　純一**

1.　はじめに―教科書の問題理解に関する方略を提案した理由―

われわれ数学教師は，日々の授業で生徒に数学的活動を促す授業を実践している。教科書などで扱われている教材の数学的広がりやその背景，そして生徒の反応を考えながら授業を構成し，実践する。しかし，思ったように授業を展開することができないことがよくある。その理由の一つは，導入の問題場面における教師と生徒の問題に対する意識や理解の差が挙げられる。例えば，教師はこれまでの指導内容と生徒の対応から「生徒にはこれは理解できるだろう。よくわかっているだろう。」と考え，生徒は「学習したことは覚えているが…？　なぜかよくわからない。」などと考えることがある。このような生徒には実感を伴って問題を理解できていないため，問題を解決するための必要な知識を見出すことができず，結果，授業の展開において，活動が進まない生徒が増え，ほんの一部の生徒の発言だけで授業が行われてしまう。

授業では，数学的な見方が豊かな生徒もいれば，問題に対して困り感をもつ生徒もいる。このように様々な生徒がいる中で，教師は生徒に数学的活動を促し，授業の中でのコミュニケーションを通して，導入場面での問題を数学的知識に対象化することが求められる。

筆者たちは，「教師が教材研究をするにあたり必要な知識は何か？」を研究課題として，平岡・野本（2017）では課題を解決するために，教師の教材研究に必要な知識として，次の２つの知識を提案した。このことを図１のようにモデル化し，「生徒の数学的活動を促す授業づくりにおける教師の知識に関するモデル」と呼ぶこととした。

①教科書や授業内容を生徒の数学的活動の視点から具体的にしていく知識 ②具体的にした知識を，生徒の実態に応じて，生徒の既習の数学的知識を基に構成できるように学習場面や学習過程を構成する知識

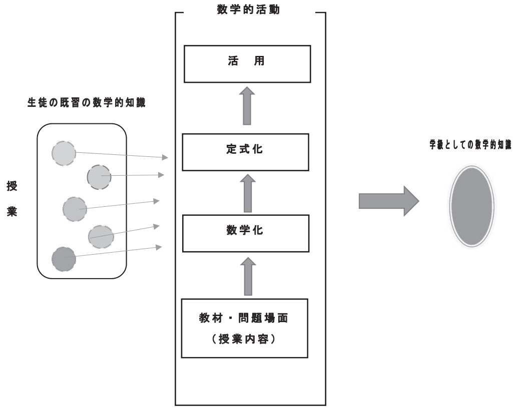


図１　生徒の数学的活動を促す授業づくりにおける教師の知識に関するモデル

また，筆者達は上記①，②の知識を具体的にするために，表１の「教科書の問題理解に関する方略」（以下「方略」）を提案し[1)]（平岡・野本，2015a，2015b，2015c），授業づくりとその実践を通して，その知識の顕在化に取り組んでいる。

* 広島経済大学経済学部教授
** 佐世保市立東明中学校教諭

表1　教科書の問題理解に関する方略（平岡・野本，2015c）

視点1	数学化[2)]（具体的な事象を数理的に捉える）の活動として，操作や図表示，帰納的な考え方などの数学的活動を取り入れること
視点2	定式化[2)]（数学的な課題を設定する）の活動として，数学化で得られた結果を既習内容と関連させることや数学的不変性の考察などを通して，数学的性質を見いだすこと
視点3	生徒個々のインフォーマルな数学的知識から，授業におけるコミュニケーションや数学的活動を通して，フォーマルな数学的知識を見出す活動を行うこと

例えば，「数と式」の場面では，次のような知識が教師の授業づくりに必要であることが見出された（平岡・野本，2017）。

- 具体的な数値による計算を幾つか行い，問題を理解すること
- 数値による操作と文字を使った式による数学的処理を対応させること

2.　本 稿 の 目 的

本稿の目的は，上記の「方略」の再提案とそれに基づいた問題の理解である。

3つの方略のうち，視点3は次のように規定していた。

視点3	生徒個々のインフォーマルな数学的知識から，授業におけるコミュニケーションや数学的活動を通して，フォーマルな数学的知識を見出す活動を行うこと

しかし，インフォーマルな知識は，学校数学で教える公的な知識と区別した知識として規定されることが多い。授業では，生徒の日常経験や具体物などのインフォーマルな知識を使うこともあるが，既習の公的な知識を使うことも多くあり，インフォーマルな知識に限定して規定すると誤解を招いてしまう。そこで，平岡・野本（2017）では，授業づくりにおいては，既習の公的知識もインフォーマルな知識も両方使うことから，視点3を次のように修正した。

視点3	生徒個々の素朴な知識や既習の数学的知識から，授業におけるコミュニケーションや数学的活動を通して，学級としての数学的知識を見出す活動を行うこと

けれども，「素朴な知識や既習の数学的知識」に関する議論を行っておらず，暫定的なものであった。そこで，本稿では，平林（2001，2006）や Webb 他（2008）などを参考にして，既習の数学的知識などの規定を明確にし，視点3を再提案する。さらに，再提案した「方略」をもとに授業の具体的な実践事例の考察を行い，生徒に数学的知識を促す授業づくりに必要な教師の知識を顕在化する。

3.　「方略」の視点3に関する再提案

3.1　「知識」という言葉の意味

「知識」という言葉の意味について，新村他（2008）によれば「ある事項について知っていること。また，その内容。」と記されている。そして，教師もそのように捉えがちである。平林（2006）も，わが国の学習評価項目の「知識」は上記の内容で解釈されやすいと述べており，その上で，「主観的行為としての「知ること」あるいは，その結果の「主観に取り入れられた知的内容」と理解されることはあまりない。」（p. 42）と述べている[3)]。

また，平林（2001）は，「どんな知識でも，程度の差こそあれ，主観性と客観性をともにもっている。両者は，普段は平衡を保っているが，時間的に進展する経験のなかで，時として その均衡が破れ，新しい均衡をもとめて互いにせめぎ合うのが生命体の常であり，そこから知識の新しい発展も期待されると考えている。恐

らくこの立場は，子どもの学習の姿を理解するのにもっとも有効であろう。」(p. 35）と述べ，子どもの学習の文脈で「知識」を考える際に，それを主観的な面と客観的な面の二つの視点から捉えるべきであると述べている。

このように，「知識」に関する内容は，いわゆる認識論の研究をもとに精微化することが必要とされる。しかし，ここではその詳細に立ち入らず，以上の知見から，筆者達は「知識」を主観的な面と客観的な面を併せもつものと考え，「知識」を次のように規定する。

「知識」とは，ある事項について知っている内容，ならびに，主観的行為としての知ることやその結果としての主観に取り入れられた知的な内容

3. 2　表現することと学習場面

「主観的行為としての知ることやその結果としての主観に取り入れられた知的な内容」について，筆者達は授業づくりの視点から，主観的行為としての知ることやその結果としての主観に取り入れられた知的な内容を「表現すること」や「学習場面」がそれに該当すると考える。

「表現すること」がそれに該当することは言うまでもない。主観的な表現として，生徒の日常経験や具体物などインフォーマルな表現が挙げられる。しかし，授業ではインフォーマルな表現だけでなく，いわゆるフォーマルな表現への足がかりとなるような表現も併せ用いながら問題解決を行っていく。このように，表現することはインフォーマルな表現だけでなく，学習事項を形成することにつながる既習の公的な知識を用いた表現も含めて考えることになる。

このことについて，Webb 他（2008）の図 2 の「氷山モデル（the iceberg model)」と「プリフォーマルな表現（pre-formal representation)」が参考になる。

氷山モデルはオランダの Realistic Mathematics Education（RME）理論[4] をもとにした教授デザイン原理を具体的に検討する中で，教師が学習過程や生徒が用いるストラテジーについての考える際のサポートをするモデルとして開発されたものである。この氷山モデルを教師が取り組むことで，生徒が「氷山の先端（top of the iceberg)」であるフォーマルな数学的表現に至るまでに，カリキュラム等で経験している多様な表現を具体的に例示することができるとしている。そして，フォーマルな数学的表現に至るまでの表現を，「インフォーマルな表現」と「プリフォーマルな表現」に分けている。

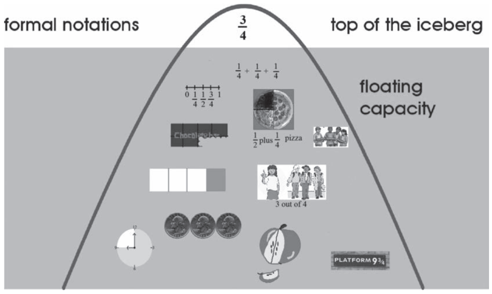


図 2　氷山モデル（Webb 他，2008，p. 111）

プリフォーマルな表現とは，図 2 の面積図やパイチャートなどである。フォーマルな表現につながるものであり，「生徒たちのインフォーマルな表現や推論に基づいて築き上げられ，より大きな数学的構造を示す」(p. 112）表現である。また，プリフォーマルな表現は，生徒自らが創るというより，教師や教科書などの教材から示唆を受けて使い始めるとしている。Webb 他（2008）は，「本質的にインフォーマルな表現やプリフォーマルな表現の経験をしていない生徒に，フォーマルなストラテジーの使用を強制すべきではない。プリフォーマルな段階での意味づけのための体験に注がれる時間は，フォーマルな段階で必要とされる学習と練習の時間を大幅に削減する」(p. 112）と述べ，授業づく

りにおいて，インフォーマルな表現やプリフォーマルな表現の経験の大切さを強調している。

以上の知見から，筆者達は授業づくりにおける「表現すること」を次のように捉えることとする。

授業づくりにおける「表現すること」とは，学習事項を構成することにつながる表現や日常経験からの表現のことである

次に「学習場面」について，授業では，知識は学習場面を通して構成される。平林（2001）はそのことに注意すべきとし，その上で，「いわば知識を載せる台，ないしは知識のおかれている文脈を，ここでは知識の客観的周辺部あるいは，暈（かさ）と呼びたいが，ここでは既存のニュアンスの介入を排するために，敢えて英語で，フリンジ（fringe）と呼んでおこう。」（p. 36）と述べている。例えば，「因数分解」を学習する際，教師は「$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$」だけを生徒に提示することはない。正方形や長方形のタイルを使っていろいろな長方形をつくる問題として説明されるであろう。ここでは，正方形や長方形を使っていろいろな長方形をつくることがフリンジの役割を持つ。

平林は教師や教科書などの教材から，授業の場で提示される共通のフリンジのことを客観的フリンジと呼ぶ。そして，「数学的知識の学習では，単に外的知識が獲得されるだけだとは考えないで，その客観的フリンジに対する主観的フリンジも併せて構成される」（p. 36）と述べる。主観的フリンジとは，要するに，生徒の主観的な概念・命題が位置づけられているフリンジのことであり，この主観的フリンジが学習された知識の活性化に極めて重要な役割を演じていると述べる。

以上の平林の知見から示唆されることは，授業の場で提示される学習場面である客観的フリンジを，生徒の内面にある主観的なフリンジに良いつながりができることが望ましいということである。そして，以上の知見から，筆者達は授業づくりにおける「学習場面」を次のように捉えることとする。

授業づくりにおける「学習場面」とは，学習内容を構成することにつながる表現や日常経験からの表現を引き出す学習場面

3.3　視点3の再提案

以上の議論を通して，筆者達は既習の数学的知識を以下のように規定する。

・いわゆる形式化された学習内容 ・学習内容を構成することにつながる表現や日常経験からの表現 ・これらの表現を引き出す学習場面

その上で，視点3を次のように修正し，再提案する。

視点3	視点1・2をもとに，生徒個々に既習の数学的知識を促す問題場面を設定するとともに，数学化・定式化の活動を通して，学級としての数学的知識を見出す学習過程をつくること

視点3は，視点1，視点2で，教科書や授業内容を生徒の数学的活動の視点から具体的にしたものをもとに，生徒個々の既習の数学的知識を促す問題場面を明確化する。そして，予想される生徒の活動を記述し，ねらいの活動で留意される点を明確にしていく視点である。

「方略」は，筆者達が教科書の問題理解の視点から提案したものであり，教科書の教材だけでなく，授業で扱ういろいろな教材に使用できる。次節では，筆者達が提案した「方略」をもとに，授業で扱われた教材を具体的に考察する。

4. 具 体 的 事 例

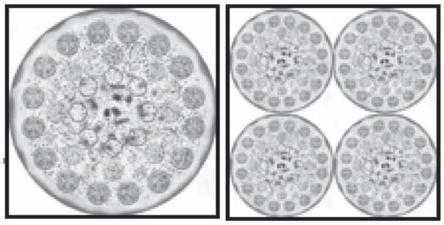
下の問題は，著者の一人が所属する長崎市数学部会の研究で作成された問題である。

この問題のねらいは，「与えられた情報を文章や図に基づいて処理すること」や「事柄が成り立つ理由を筋道を立てて証明すること」である。長崎市数学部会での調査では，理由の説明を記述する問題は正答率が10%を下回るという結果が出ていた。数学部会ではこの原因を，事象の数量関係を捉え，それを式で表そうとする態度が培われていないことにあると考えていた。また，全国・学力学習状況調査の結果（2013）では，「数学的に表現したり，数学的に表現され

ひとしさんは，ピザが好きでよく宅配のピザを頼みます。ある日，ピザを注文しようと思ったときに，次のようなことを考えました。

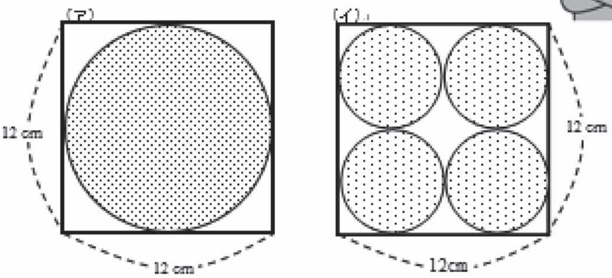
『正方形の容器にちょうど入る１枚のピザと，同じ容器にちょうど入る４枚のピザではどちらの方が多いのだろうか。』

そして，この疑問を解決するために，ひとしさんは，次のような問題を考えました。



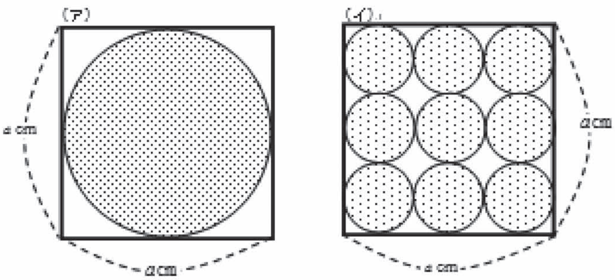
（1）下の図のように，１辺が12㎝の正方形（ア）（イ）があります。正方形（ア）には，その内部にぴったりくっつく１つの円をかきました。正方形（イ）の内部には，同じ大きさの４つの円をぴったりくっつくようにかきました。

正方形（ア）の内部にかかれた円の面積と正方形（イ）の内部にかかれた円の面積の和が等しくなることを示しなさい。



この問題を解いた後，ひとしさんは正方形にぴったりくっつく円の面積の和には，特別なきまりがあるのではないかと考え，次の問題を考えました。

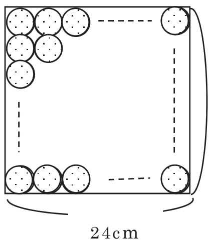
（2）下の図のように，１辺が $a$cm の正方形（ア），（イ）があります。正方形（ア）には，その内部にぴったりくっつく円を１つかきました。また，正方形（イ）の内部には，同じ大きさの９個の円をぴったりくっつくようにかきました。正方形（ア）の内部にかかれた円の面積と正方形（イ）の内部にかかれた円の面積の和が等しくなることを示しなさい。



た事柄を読み取ったりすること」(p. 8) が課題として挙げられている。これらのことから，数学部会でも日々の授業の中で，事象の数量関係を捉え，それを式で表す態度を培うとともに，その理由を説明することを継続的に行うことが必要であると考えている。

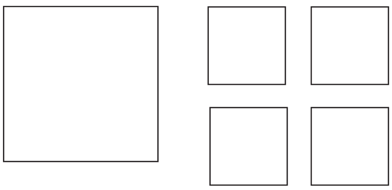
そこで本節では，上記の問題を前節の「方略」に基づいて問題の理解を行う。なお，上記の問題の最終目標は次の問題である。

図のように，ピザの枚数をもっともっと増やしたときはどうなるだろうか？



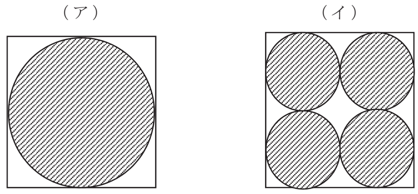
【視点１】

本題に入る前に，問題の図を考えるとき，ピザが円，容器が正方形であることを確認することが大切である。また，ピザが４つ入った図には正方形が４つあること，さらに，４つの正方形は元の正方形を四等分した正方形であることを確認したい。



このような数学化を通して，ピザとその容器の問題から円と正方形の数学的問題に変換させることができる。さて，この図から直観的に左の正方形は右の４つの正方形に分割され，また面積の和は左の正方形に一致することは図を用いることで容易に説明することができる。

以上のことをもとに，ピザの問題を考える。



（ア）には正方形に１つの円がさら内接し，（イ）には正方形に４つの円が内接している。このとき，（イ）の４つの円は，それぞれ１辺の長さが半分の正方形に内接していることを確認することが大切になる。

正方形の関係を理解することで，円の面積の関係に話題を転換させることができる。すなわち，次の課題である。

（イ）の４つの円の面積の和は，（ア）の１つの円の面積に等しいだろうか？

生徒には，正方形の面積の関係を類推することも可能になる。例えば，

- （イ）の１つの円の面積を４倍したものが，（ア）の円の面積になるだろう
- （イ）の円の直径は，（ア）の円の直径の半分である

などの見通しをもつことを期待する。

さらに，実際に計算を行い，（ア）と（イ）の円の面積の関係を調べる。

（ア）の円

$12\times12\times\pi=144\pi$

（イ）の円

１つの円の直径　$24\div2=12$

１つの円の半径　$12\div2=6$

１つの円の面積　$6\times6\times\pi=36\pi$

４つの円の面積の和　$36\pi\times4=144\pi$

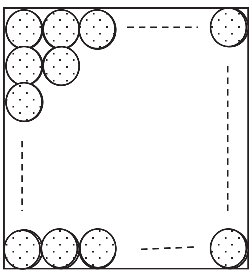
このように，帰納的な考え方と類推的な考え方を通して，円が１列に３つ並んだときや，１列に４つ並んだときも同様な活動を行うことができる。これらの場合も（ア）の円の面積が等しくなることを同様に確かめることができる。

【視点２】

【視点１】の活動により，１列に並ぶ円を２

つ，３つ，…と増やしたとき，（ア）の円の面積が等しくなることが確認できた。そこで，「円の数をもっともっと増やしたときはどうなるだろうか？」という問題に対しても，帰納的な考え方により見通しをもつことができる。このことを数学的な課題として，「円を１列にｎ個並べたとき」と設定した問題を考えさせる。これは，具体的な数から文字を用いた式への転換場面になる。

ｎ枚



１つの円の直径　$24 \div n = \frac{24}{n}$

１つの円の半径　$\frac{24}{n} \div 2 = \frac{12}{n}$

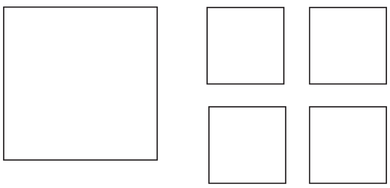
１つの円の面積　$\frac{12}{n} \times \frac{12}{n} \times \pi = \frac{144}{n^2}\pi$

すべての円の面積の和　$\frac{144}{n^2}\pi \times n^2 = 144\pi$

【視点３】

【視点１】より，正方形だけの場合の活動を入れることで，本題を理解するイメージをつかむことがよりできるので，生徒個々の既習の数学的知識を促す問題場面として次のような問題を設定する。

ひとしさんは，左のパンを４枚に等しく分けました。このとき，左のパンと４枚に分けたパンはどちらの方が多いだろうか？

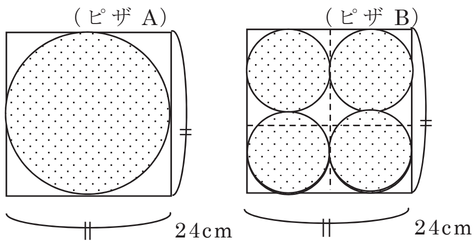


この問題を通して，パンを正方形として考えることにより，

- 右の正方形を４枚合わせれば左の正方形になる
- 右の正方形の１辺の長さは，左の正方形の１辺の長さの半分である
- 右の正方形の１辺の長さを２倍すると，左の正方形になる

などを生徒から引き出されることが期待される。特に，３番目の発想は，小学校で学習した拡大・縮小の考え方である。さらに，中３で学習する相似の考え方につながる発想でもある。そして，本時の問題場面へとつなぐことができる。

ひとしさんはピザが大好きです。ある日，スーパーで，24 cm の容器ににぴったり入っている１枚のピザと，同じ大きさの容器に４枚ぴったりと並べてあるピザが，同じ値段で売られていました。どちらがお得か，考えてみよう。



私の予想

（　）ピザＡの方が、得！

（　）ピザＢの方が、得！

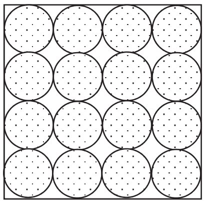
（　）その他

この問題では，ピザは円，容器は正方形として数学化した問題として解決することになる。そして，「ピザが，１列に３つ並んだときや，１列に４つ並んだときはどうだろうか？」という発問に対して，円と正方形の問題に翻訳しながら具体的な計算を通して，これらの場合も１つの円の場合に一致することを確かめることが

できる。

【視点2】では，ねらいとなる問題について，nを使った問題解決を促すために具体数で行ったときの操作と計算をもとに解決していく。

例えば，1列に4つ並んだとき



1つの円の直径　24÷4＝6

1つの円の半径　6÷2＝3

1つの円の面積　3×3×π＝9π

すべての円の面積の和

9π×16＝144π

このことの類推的な考え方を通して，1列にn枚ずつ（n^2枚）並んだとき，

- 1つの円の直径は，24を1列の円の数で割ればよいから，$24 \div n = \frac{24}{n}$
- 1つの円の半径は，1つの円の直径を2で割るから，$\frac{24}{n} \div 2 = \frac{12}{n}$
- 1つの円の面積は，$\frac{12}{n} \times \frac{12}{n} \times \pi = \frac{144}{n^2}\pi$
- 1辺には円はn枚あるから，全部で円はn^2枚ある。
- n^2枚のピザの面積の和$\frac{144}{n^2}\pi \times n^2 = 144\pi$

このように，数値による操作と文字を使った式による数学的処理を対応させることで学級としての数学的知識を見出す活動を行うことができる。

5.　お　わ　り　に

本稿では，「方略」における既習の数学的知識を次のように規定するとともに，視点3を再提案した。

- いわゆる形式化された学習内容
- 学習内容を構成することにつながる表現や日常経験からの表現
- これらの表現を引き出す学習場面

数学の授業づくりでは既習事項が大切であるとよく言われるが，既習事項と言えば，上記のいわゆる形式化された学習内容と捉えがちである。しかし，そうではなく，今まで培ってきた表現や学習内容を構成することにつながる学習場面のことを含めて述べているのである。筆者達はそのことを明文化するために，幾つかの先行研究をもとに，既習の数学的知識を上記のように規定し，視点3を再提案したのである。

次に，「与えられた情報を文章や図に基づいて処理すること」や「事柄が成り立つ理由を筋道を立てて証明すること」をねらいにおいた問題における，生徒の既習の数学的知識を促す手立てを，「方略」をもとに具体化した。【視点1】にある

- 問題場面を単純化し，生徒の直観的な理解やイメージを引き出すこと

という視点は，生徒の既習の数学的知識を促すことにつながる。また，この視点はどのような問題でも十分に活用されうる手立てである。問題場面を単純化することは具体的にどのようなことなのかを，他の具体的事例を通して考察することが今後の課題である。

また，今回の具体的事例でも，次の2つの視点を使っており，

- 具体的な数値による計算を幾つか行い，問題を理解すること
- 数値による操作と文字を使った式による数学的処理を対応させること

これらの視点は他の問題でも十分に活用されう

る手立てであることが分かる。

今後の課題として，教科書などの教材を生徒の既習の数学的知識を促す題材にしていくために，筆者達が提案する「方略」をもとに具体化し続けていきたい。また，それを通して，生徒の数学的活動を促す授業づくりにおける教師の知識を顕在化していきたい。

注

1） 視点１・視点２は，教科書や授業内容を生徒の数学的活動の視点から具体的にしていくための視点である。また，視点３は，視点１・視点２をもとに，生徒の素朴な知識や既習の知識から授業としての数学的知識に至るまでの学習過程を構成するための視点であり，いわゆる授業上の留意点について考える。

2） 数学化・定式化という語に関する筆者らの規定について述べる。Freudenthal（1968）は，数学化について，「人間が学ばなければならないものは，閉じた体系としての数学ではなく，活動としての数学，つまり，現実を数学化するプロセスであり，可能ならば，数学を数学化するプロセスである。」（p. 7）と述べ，数学化は数学を創り出すプロセスを総称する言葉として捉えられている。また，定式化について，数学的モデル化の過程の中でよく使われる語であり，例えば，三輪（1983）は，それを「その事象に光を当てるように，数学的課題に定式化する」（p. 286）と述べている。

それに対し，筆者達は，数学化を「具体的な場面における問題の数学化（具体的な事象を数理的に捉える）活動」，定式化を「具体的な事象を数学的に定式化（数学的な課題を設定する）活動。理想化・単純化・理想化ともいえる。」と規定した。その理由は，数学的活動の視点に立った授業づくりでは，数学的事象の各要素を数理的に具体的に捉えることと，数理的な視点で捉えたことを数学的な課題に設定することは異なる相であり，それぞれを意識して捉えていくことが授業づくりにおいて大切であると考えたからである。したがって，筆者達は，数学化・定式化の語について狭義の意味で規定している。

3） フランス語では，「知識」を，savoir と connaissance の２つに区分している。ロベール仏和大辞典（2005）によれば，その意味について，次のように記るされている。

savoir：（学習，経験によって得られた）知識，学識；学問

connaissance：知ること，理解；認識

平林（2006）は，前者はいわゆる客観的・外在的知識であり，外知識と呼んでいる。また，後者は主観に取り入れられた状態の知識であり，内知識と呼んでいる。

4） オランダの Realistic Mathematics Education（RME）理論は，Freudenthal の考えを基にし，授業において，子どもたちにとって経験的に現実的であるような問題場面を取り上げながら，子どもたちがインフォーマルな推論を数学化する過程を重視している。その注目すべき特徴は，次のようにまとめることができる。

・生徒が数学化を意識化させようとする働きや教師による支援，生徒間の相互作用などを通して数学を構成していること
・インフォーマルなモデル（表現）である model-of やフォーマルなモデル（表現）である model-for という概念を導入していること
・モデルの対象化やモデルの役割の転換が数学の学習の本質であり，model-for のベースとなる model-of を認識し，それらを生かしていること

なお RME の概要については，平岡・野本（2015b）を参照のこと。

引用・参考文献

国立教育政策研究所（2013），『平成25年度　全国学力・学習状況調査　報告書　中学校　数学』

新村　出　他（2008），『広辞苑　第六版』，岩波書店

平岡賢治・野本純一（2015a），「数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究(1)—算数・数学的活動の視点から—」，『九州地区国立大学教育系・文系論文集』2(2)，No. 7

平岡賢治・野本純一（2015b），「数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究(2)— RME 理論を手がかりにして—」，『長崎大学教育学部研究紀要（教科教育学）』，87–98

平岡賢治・野本純一（2015c），「教科書の問題理解に関する方略を基にした授業づくりに関する研究—中学校数学の題材を事例にして—」，『広島経済大学　研究論集』38(2)，1–11

平岡賢治・野本純一（2017），「生徒の数学的活動を促す授業づくりに関する考察—生徒の既習の数学的知識に視点をあてて—」，『広島経済大学研究論集』40(1)，1–8

平林一栄（2001），「授業とは何か～数学教育における認識論的授業論～」，近畿数学教育学会誌，14，34–41

平林一栄（2006），「数学教育学の居場所（niche)—新しい認識論の視点から—」，『数学教育学論究』，91，39–47

三輪辰郎（1983），「モデル化」，『現代教育学の基礎』，筑波大学教育学研究会編，286–289

文部科学省（2008），『中学校学習指導要領解説　数学編』，教育出版

David C. Webb, Nina Boswinkel, Toruus Dekker (2008), Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School,* Vol. 14, No. 2

Freudenthal, H.（1968), Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3–8