広島経済大学研究論集
第40巻第1号　2017年6月
http://dx.doi.org/10.18996/kenkyu2017400101

生徒の数学的活動を促す授業づくりに関する考察*

――生徒の既習の数学的知識に視点をあてて――

平岡　賢治**・野本　純一***

1.　はじめに―生徒の数学的活動を促す授業づくりを行う上で，教師に必要なこと―

現行の中学校学習指導要領数学科の目標には，「数学的活動を通して…(中略)…数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる」（文部科学省，2008）と示され，また，小学校算数科・高等学校数学科においても，それぞれの目標に同様なことが示されている。われわれ教師も数学的活動を取り入れた授業を日々実践している。しかし，授業で扱う問題や学習内容が教師にとって平易なものであっても，生徒が考えようとしても内容が理解できないもの，結果として，生徒の数学的活動を促せないことがよくある。また，「華やかに展開されている操作活動も，あらかじめそれと数学的概念・知識・技能とのつながりが，きめ細かく検討されていなければ，きわめて空しい教授学的努力に終わってしまう」（平林，1982）と指摘しているように，操作活動と授業のねらいのつながりが明確でないこともよくある。

そこで数学科の授業づくり，とりわけ，生徒の数学的活動を促す授業づくりでは，教師の持っている知識を基に，教科書や授業の内容を生徒の数学的活動の視点から表現し直し，数学化[1)]や定式化[1)]をする過程を具体的にしていくことが必要である。

一方，構成主義や社会文化主義などの観点から，「授業は生徒が知識を獲得する過程である」と捉え，生徒個々の既有の知識を想起させ，それをクラスでの議論など，他者との相互関連の中で行う数学的活動を通して，ねらいとなる知識を獲得させるように構成することが求められている。そして，生徒の知識の成長を捉える上で，生徒がもっている問題解決のための既有の知識や考えに対し，より関心が向けられている（日野，2010）。例えば，日常経験や具体物，絵図などのように外的に結びついた知識，すなわち，生徒のインフォーマルな知識（Mack, 1990）を授業による生徒間の相互作用により，学級としての数学的知識に練り上げることに焦点をあてた研究（例えば，布川，1993；吉田・河野，2003；石井，2012）が行われている。

このように，生徒が主観的・直観的に持っている素朴な知識や既有の知識に着目しており，授業づくりにおいても，教師が学習内容を，生徒の素朴な知識や既有の知識を基にするとともに，授業のねらいにつながるような学習場面や学習過程を構成することが望まれる。

これらのことをモデル化すると，図1のようになり，筆者達はこのモデルを，「生徒の数学的活動を促す授業づくりにおける教師の知識に関するモデル」と呼ぶこととする。なお，このモデルは暫定的なものであり，実際の授業づくりを繰り返すことで，より洗練されたものにしていく。

---

* 本稿は，日本数学教育学会第48回研究発表会（2015年，信州大学）で口頭発表した論文を大幅に加筆・修正したものである。

** 広島経済大学経済学部教授
*** 佐世保市立東明中学校教諭

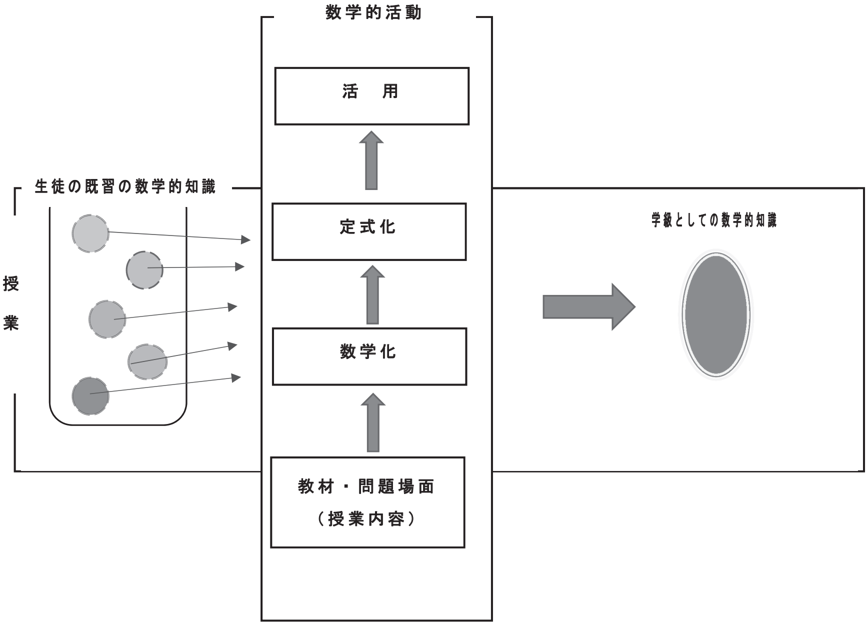


図1　生徒の数学的活動を促す授業づくりにおける教師の知識に関するモデル

図1から分かるように，数学的活動を促す授業づくりを構成するために，教師は，次の2つの知識を身に付けておく必要がある。

①教科書や授業内容を生徒の数学的活動の視点から具体的にしていく知識

②具体的にした知識を，生徒の実態に応じて，生徒の素朴な知識や既習の知識を基に構成できるように学習場面や学習過程を構成する知識

本研究は，これらのことを実際の授業づくりを通して，具体的にしていくものである。

2.　本 稿 の 目 的

筆者達は，上記の2つの知識を具体的にしていくための方略として，表1の「教科書の問題理解に関する方略」（以下「方略」と記す）を提案し，中学校教科書の問題を「方略」をもとに授業づくりを行っている（平岡・野本，2015a，2015b，2015c）。

視点1・視点2は，教科書や授業内容を生徒の数学的活動の視点から具体的にしていくための視点である。また，視点3は，視点1・視点2をもとに，生徒の素朴な知識や既習の知識から授業としての数学的知識に至るまでの学習過程を構成するための視点であり，いわゆる授業上の留意点について考える。

筆者達は，上記の「方略」を用いて，数学科の授業における生徒個々の既習の数学的知識を促す手立てを具体化するために，次の①，②の方法で研究を進めている。

表1　教科書の問題理解に関する方略（平岡・野本，2015c）

視点1	数学化[1]（具体的な事象を数理的に捉える）の活動として，操作や図表示，帰納的な考え方などの数学的活動を取り入れること
視点2	定式化[1]（数学的な課題を設定する）の活動として，数学化で得られた結果を既習内容と関連させることや数学的不変性の考察などを通して，数学的性質を見いだすこと
視点3	生徒個々の素朴な知識や既習の数学的知識[2]から，授業におけるコミュニケーションや数学的活動を通して，学級としての数学的知識を見出す活動を行うこと

①中学校数学の4領域「数と式」,「図形」,「関数」,「資料の活用」において，筆者達の授業づくりや実践をもとに，授業における生徒の既習の知識を促す手立てをまとめる。

②まとめた手立てを，授業づくりに活かし，その実践と反省をもとに，手立ての修正を図りながら，より有効な手立てを作成する。

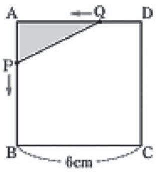
そこで，本稿では中学校数学の教科書の「数と式」の単元について，上記の「方略」をもとに授業づくり，授業実践とその考察を通して，今後の課題をまとめる。

本研究の独自性を述べる。教材研究の具体的な方法に関する研究について，池田（2014），吉井（2014），太田（2013）などで行われているが，それらの研究と本研究の差異の1つとして，教科書で扱われている題材を中心に据えている点が挙げられる。教師が日々の授業で一番拠り所にしているのは教科書であり，教科書の内容から生徒の実態に応じた活動を考え，授業を実践することが求められる。そして，そのためには教師が教科書を理解する方法や授業構成の過程などの理論化が必要とされ（Remillard, 2009），本研究はその具体化のために行っているといえる。

3.　具体的事例—2次方程式の利用（中学校3年）—

本稿で扱った教科書は，筆者の一人が日頃の授業に用いているものである。

Q　右の図のような正方形ABCDで，点PはAを出発してAB上をBまで動きます。
また，点Qは，点PがAを出発するのと同時にDを出発し，Pと同じ速さでDA上をAまで動きます。
点PがAから1cm，2cm，…，6cm動いたときの△APQの面積をそれぞれ求めてみましょう。



点Pの動いた長さ（cm）	1	2	3	4	5	6
△APQの面積（cm²）						

例3　Qで，△APQの面積が3cm^2になるのは，点PがAから何cm動いたときですか。

考え方　AP＝$x$cm　のときに△APQの面積が3cm^2になるとすると，そのときのAQの長さは$(6-x)$cmとなる。

解答　AP＝$x$cm　のとき，△APQの面積が3cm^2になるとすると

$$\frac{1}{2}x(6-x)=3$$

両辺を2倍し，展開して整理すると

$$x^2-6x+6=0$$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times6}}{2\times1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{12}}{2}$$

$$=3\pm\sqrt{3}$$

答　$(3+\sqrt{3})$cm，$(3-\sqrt{3})$cm

$\sqrt{3}=1.73$として，例3のAPの長さを，四捨五入してmmの単位まで求めなさい。

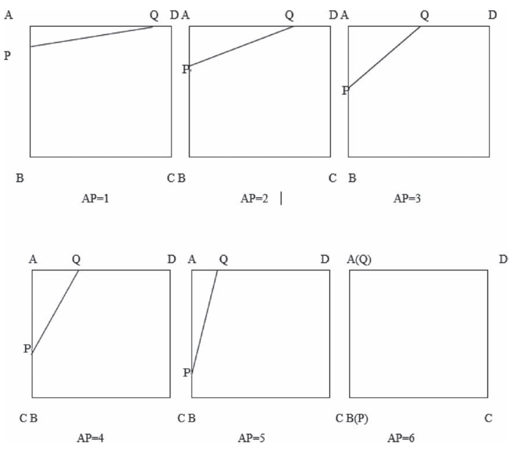
図2　東京書籍　新しい数学3（p. 82）

3.1　授業における生徒の既習の知識を促す手立て

この問題は正方形の辺上を２点 P，Q が２つの頂点 D，B から同時に同じ速さで動くとき，△APQ の面積に関する問題である。前節の方略の各視点から考察すると次のようになる。

【視点１】

数学化の活動では，操作，図表示，帰納的な考え方などを取り入れる。ここでは，正方形に２点 P，Q を図示すること，△APQ を具体的にかき表すことなどを通して，△APQ の面積という数値を対応させる活動を促し，△APQ の形と面積の関係を実感させることができる。これらを通して生徒個々の既習の知識と関連させることで，２辺 AP，AQ の長さをそれぞれ求めると同時に△APQ の具体的な形と面積を求める活動を誘発させることができる。教師としては，このような活動を通して面積の動きを図形上の点で視覚的に捉えさせ，点の移動による△APQ の変化，そして面積の数値の変化を関連させる数学的活動を促すことができる。



さらに，正方形にかいた△APQ をみることで，AP＝１と AP＝５，AP＝２と AP＝４のとき△APQ がそれぞれ合同になることを発見することができる。また，点 P が点 A を出発するときを併せて考えると，面積は０から始まり０で終わっていることを直観的に感じさせることもできる。

【視点２】

【視点１】の活動により，△APQ の面積が０からある値まで増加し，再び０まで連続的に変化することに関する直観的な理解を促すことができる。さらに，面積の増加と減少の様子も合同な三角形を意識することで対称的な変化についても同様に理解を促すことができる。そして，例３の△APQ の面積が３ cm^2 になる辺 AP の長さを求めさせる。この結果，

- 面積が３ cm^2 になる AP の長さが存在すること（さらに，表から２つあることが予想できる）
- 問題の表から，AP の長さは１ cm と２ cm の間，４ cm と５ cm の間にある

などが予想される

しかし，△APQ の面積が３ cm^2 となる AP の長さを今までかいた図では直接求めることはできない。そこで，数学的な課題を設定すること，すなわち，求める AP の長さを x cm^2 として，△APQ の面積を x の式で表せばよいなどの気づきを通して，次のような２次方程式を立式することができる。

$$\frac{1}{2}x(6-x)=3$$

【視点３】

【視点１】において，正方形 ABCD に具体的に△APQ の図をかいたり，面積を求めたりする活動を通して，AP の長さの変化とともに，△APQ やその面積が変化していることを理解する。そして，**【視点２】**において，これらを数学的に表すものとして，AP の長さを x とおいて，面積を x の２次式で表す。面積が３に

なる x の値はこれまでの既習内容である２次方程式を解くことで AP の長さを求める活動を行う。そして，２次方程式に立式していく。これは，

図
＜生徒個々の既習の数学的知識＞
↓
変　数
↓
文字による表記
＜授業としての数学的知識＞

という活動として位置づけることにより，未知数の設定，方程式の立式などこれまでの学習してきた数学的知識を用いる活動，すなわち，x を使った数学的な関係に対象化することになる。

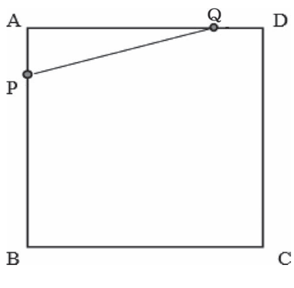
3.2　授業実践

前項における「方略」の視点からの考察を踏まえて，授業実践を行った。以下の内容は，その授業記録の一部である。なお，①・②は授業後の振り返りで改善が必要な箇所として挙げられたところであり，別項で詳しく述べる。

【数学化】の段階

問題を読んだ後，次の発問を行い，授業を展開した。

T：点 P がスタートのときは，△APQ の面積はいくら？



S1：まったく動いていないから，面積は０。
T：①そうだよね。点 P が１cm 動いたときは，△APQ はどのような三角形になるかな？プリントの正方形 ABCD に書いてみましょう。
T：どのような形になったかな？
S2：AP は１cm，AQ は５cm の直角三角形。
T：なんで，AQ は５cm ？
S3：点 P と点 Q は同じ速さで動くから，DQ の長さは１cm。だから，AQ の長さは６－１＝5 cm。

生徒の理解の様子を見て，再度，S3の発表の内容を教師が繰り返した上で，次の発問を行った。

T：なら，点 P が１cm 動いたときの△APQ の面積はいくらになりますか？
S4：$1\times5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$
T：②では，点 P が２cm，３cm・・・と動いたときの△APQ はどのような三角形になるかな？プリントの正方形 ABCD に書いた上で，△APQ の面積を求めましょう。そして，プリントの表にまとめましょう。

このように，プリントの正方形に点 P が２cm，３cm・・・と動いたときの三角形をすべて描かせた上で，△APQ の面積を求めさせた。

【定式化】の段階

近くの生徒に聞きながら表をまとめた上で，本題である，△APQ の面積が３cm^2 になるのは，点 P が動いた長さの地点は２か所あること，その箇所は１と２の間，４と５の間にあることを理解させた。

AP の長さ	0	1	2	3	4	5	6
△APQ の面積	0	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	0

その上で次の質問を行った。

T：点Pの場所の位置がだいたい分かってきたけど，それを求めたいから，どのようにする？
S5：APの長さを求めたいから，APをxとおく。
T：じゃ，他の長さは？
S6：AQの長さは，6－xで表される。

クラスの理解が微妙な雰囲気だったので，その生徒に理由を聞いた。

T：なんで，AQの長さは6－xなの？
S7：APの長さが1cmのとき，DQの長さは1cm。
AQの長さは6－1＝5だったから，APの長さがx cmのときは，DQの長さもx cm。だから，AQの長さは6－x。

3.3　授業の振り返り―生徒の既習の知識を促すという観点から―

①「そうだよね。点Pが1cm動いたときは，△APQはどのような三角形になるかな？プリントの正方形ABCDに書いてみましょう。」という発問について

上記の発問では，結局，教師が生徒に図を書かせていることになる。大切なのは，生徒に図の必要性を感じさせることである。だから，

T：そうだよね。点Pが1cm動いたときはどうなるだろうか？求めるためにはどうすればよいだろうか？
S：図をかいたらいい。
T：では，やってみよう。

というように，生徒から図をかくという発想を導くことが大切である。

②「では，点Pが2cm，3cm・・・と動いたときの△APQはどのような三角形になるかな？プリントの正方形ABCDに書いた上で，△APQの面積を求めましょう。そして，プリントの表にまとめましょう。」という発問について

上記の発問も表によってまとめるという手段を生徒に与えていることになる。そうではなく，変化するものをまとめる際の手段として表が必要であることを生徒から出させることが大切である。だから，

T：では，点Pが2cm，3cm・・・と動いたときの△APQはどのような三角形になるでしょうか？そして，その面積はどのようになるでしょうか？

と発問した上で，生徒に自由に解かせる時間を設定し，その活動の中で表を用いることに気づかせることが必要である。

4.　ま　と　め

本稿では，「数と式」の単元に掲載されている問題などについて，授業における生徒の既習の数学的知識を促す手立てを，「方略」をもとに具体化し，授業実践を行った。

事例にあるように，具体的な数値による図を書かせたり，面積を計算させたりするなど，生徒の既習の数学的知識を促すことで，生徒は問題の意味を次第に理解できるようになった。また，数値による操作を十分に取り組んでいので，文字を使った式による数学的処理についても，具体的な数値の場合に戻って考えることができ，生徒の既習の数学的知識を授業としてのフォーマルな数学的知識につなげることができた。

数学教師は，一事例の問題解決を通して，生徒は問題を一般化できると考えがちである。しかし，生徒は当面の問題解決をしただけであり，

解決の方法を対象化するものではない。したがって，似たような問題場面を設定し，問題解決をすることで，数値による操作の類似性等などの生徒の洞察から一般化に向かうように授業を仕組んでいく必要がある。このことについて，van Hiele（1986）は，生徒の洞察を高めることを意図した主要な構成要素として，学習の5段階[3]を設定している。その中で，学習内容の固有な構造を対象にする段階を「明示化」としているが，「明示化」につなげるためには，生徒が特徴的な構造に慣れさせるために「導かれた方向づけ」，つまり，次第にこのレベルに特徴的な構造が生徒の前に現われてくるような教材を計画的に設定していくことが必要であると述べている。

また，今回の事例では，生徒の既習の数学的知識から授業としてのフォーマルな数学的知識につなげる手立てとして，「方略」をもとに，次の2つの視点，

・具体的な数値による計算を幾つか行い，問題を理解すること ・数値による操作と文字を使った式による数学的処理を対応させること

を使っているが，これらの視点は教科書の「数と式」に関する他の問題でも十分に活用されうる手立てである。

今後の課題として，教科書の問題を生徒の既習の数学的知識を促す題材にしていくために，筆者達が提案する「方略」をもとに具体化するとともに，授業づくりなどを通して，手立ての修正などを図りながら，より有効な手立てに練り上げていきたい。

注

1）数学化・定式化という語に関する筆者らの規定について述べる。Freudenthal（1968）は，数学化について，「人間が学ばなければならないものは，閉じた体系としての数学ではなく，活動としての数学，つまり，現実を数学化するプロセスであり，可能ならば，数学を数学化するプロセスである。」（p. 7）と述べ，数学化は数学を創り出すプロセスを総称する言葉として捉えられている。また，定式化について，数学的モデル化の過程の中でよく使われる語であり，例えば，三輪（1983）は，それを「その事象に光を当てるように，数学的課題に定式化する」（p. 286）と述べている。

それに対し，筆者達は，数学化を「具体的な場面における問題の数学化（具体的な事象を数理的に捉える）活動」，定式化を「具体的な事象を数学的に定式化（数学的な課題を設定する）活動。理想化・単純化・理想化ともいえる。」と規定した。その理由は，数学的活動の視点に立った授業づくりでは，数学的事象の各要素を数理的に具体的に捉えることと，数理的な視点で捉えたことを数学的な課題に設定することは異なる相であり，それぞれを意識して捉えていくことが授業づくりにおいて大切であると考えたからである。したがって，筆者達は，数学化・定式化の語について狭義の意味で規定している。

2）平岡・野本（2015c）では，視点3について，次のように規定していた。

視点3　生徒個々のインフォーマルな数学的知識から，授業におけるコミュニケーションや数学的活動を通して，フォーマルな数学的知識を見出す活動を行うこと

しかし，インフォーマルな知識は，学校数学で教える公的な知識と区別した知識として規定されることが多い。授業では，生徒の日常経験や具体物などのインフォーマルな知識を使うこともあるが，既習の公的な知識を使うことも多くあり，インフォーマルな知識に限定して規定すると誤解を招いてしまう。平林（2001，2006）の内知識に関する議論も含め，インフォーマルな数学的知識とは何かに関する考察を行う必要があるが，筆者達は，授業づくりにおいては，既習の公的知識もインフォーマルな知識も両方使うことから，それらを「素朴な知識や既習の数学的知識」と規定し直した。また，なお，この規定は暫定的なものであり，別の論文でインフォーマルな数学的知識に関する考察を行い，規定を明確にしていく。

3）van Hiele（1986）は，生徒の洞察を高めるための主要な構成要素として，学習の5段階を挙げている。

①情報（探究）
この段階では，示された教材において，はっきりした構造を発見することができる。

②導かれた方向づけ
生徒は，情報の段階で用いた教材によって，特徴的な構造に慣れてくる。

③明示化
生徒は，授業における討論で，その学習に固有

な構造について意見をかわす。

④自由な方向づけ

いろいろな方法で解決できる課題に出会う。その時に自分自身の解決方法を見つける。

⑤統合

生徒は，自分で考察し，明らかになったすべての領域において簡潔に表現しようとする。つまり，今までに分かったことを要約する。

参　考　文　献

池田敏和（2014），『中学校数学科　数学的思考に基づく教材研究のストラテジー24』，明治図書

石井康博（2012），『数的活動で利用される具体物が子どものインフォーマルな知識および方略に与える影響』，早稲田大学学位論文（人間科学）

太田伸也（2013），「数学科授業における子どもの思考の把握から教材研究へ」，『日本数学教育学会春季研究大会論文集』，1，201−202

布川和彦（1993），「van Hiele 理論に対する新たな意味づけ―インフォーマルな知識と発達と発達の最近接領域を手がかりとして―」，『教育方法学研究』，19，37−46

日野圭子（2010），「第５章　認知・理解・思考　§１認知・認識論」，日本数学教育学会編，『数学教育学研究ハンドブック』，294−309，東洋館出版社

平岡賢治・野本純一（2015a），「数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究（1）―算数・数学的活動の視点から―」，『九州地区国立大学教育系・文系論文集』，2(2)，No. 7

平岡賢治・野本純一（2015b），「数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究（2）― RME 理論を手がかりにして―」，『長崎大学教育学部研究紀要（教科教育学）』，87−98

平岡賢治・野本純一（2015c），「教科書の問題理解に関する方略を基にした授業づくりに関する研究―中学校数学の題材を事例にして―」，『広島経済大学　研究論集』，38(2)，1−11

平林一栄（1982），「操作的活動とは何か―今なぜ注目されるのか―」，『授業研究』，239，5−11

平林一栄（2001），「授業とは何か～数学教育における認識論的授業論～」，『近畿数学教育学会誌』，14，34−41

平林一栄（2006），「数学教育学の居場所（niche）―新しい認識論の視点から―」，『数学教育学論究』，91，39−47

藤井斉亮ほか（2012），『新しい数学３』，東京書籍

三輪辰郎（1983），「モデル化」，筑波大学教育学研究会編，『現代教育学の基礎』，286−289

文部科学省（2008），『中学校学習指導要領解説　数学編』，教育出版

吉井貴寿（2014），「教材研究方法としての否定利用」，『数学教育学論究』，96，201−208

吉田　甫・河野康男（2003），「インフォーマルな知識を基にした教授介入―割合の概念の場合―」，『科学教育研究』，27(2)，11−119

Freudenthal, H.（1968）, Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3–8

Mack, N. K.（1990）, Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16−32

Remillard, J. T.（2009）, Part II commentary: Considering what we know about the relationship between teachers and curriculum materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd（Eds.）*Mathematics teachers at work:Connecting curriculum materials and classroom instruction*, 17−36. New York; Routledge

van Hiele, P. M.（1986）, Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education, Academic Press