広島経済大学経済研究論集
第43巻第２号　2020年11月
http://dx.doi.org/10.18996/keizai2020430202

構造 VAR モデルの識別性と推定（Ⅰ）*
――正規性誤差項の場合――

前　川　功　一**

1.　は じ め に

経済時系列分析における Vector Autoregressive Model（以下 VAR モデル）及び Structural Vector Autoregressive Model（以下 SVAR モデル）は，実証分析に欠かせないモデルである。このモデルの統計学的基礎理論は，2000代初頭にはほぼ完成の域に達したと言えるが，その後も進歩を続けている。Kilian and Lütkepohl（2017）によって，最近時に至るまでの理論及び実証研究成果を交えつつ包括的に整理されている。また理論的成果に基づいて実証分析用に開発された多くのソフトウェアも普及している。その結果，実証分析に当たっては用意された統計計算パッケージにデータを入力し，分析目的に適った選択肢を選択すれば，直ちに推定結果が出力されるという極めた便利な状況になっている。筆者もその恩恵に浴してはいるものの，問題点を感じ無いわけではない。その問題点とは計量経済学では古くから意識されている「識別性」の問題，すなわち「得られたデータから，それを発生させた経済構造を唯一に特定できるか」という問題である。「識別不能」な場合は，データの背後にある経済構造が複数個存在する可能性が残る。この問題に対しては，いくつかの対処法が存在している。もっとも一般的な対処法は，唯一の解をもたらすように未知パラメータの間に線形制約を置き，位数条件（order condition, Rothenberg（1971））と呼ばれる条件が満たされているかどうかを調べるという方法である。しかし位数条件は識別可能性の必用条件にすぎない。十分条件として階数（rank condition）と呼ばれる条件についてもいろいろな場合について研究されている。ところが階数条件は特殊なケースを除いては，確認が困難である場合が多いため，計量経済学の初期の段階では慣例的に位数条件のみをチェックして分析が行われていた。その後も長らく SVAR モデルの計算可能な階数条件は知られていなかったが，Rubio-Ramírez, Waggoner, and Zha（2010）（以下，Rubio-Ramírez et al.（2010））は SVAR モデルに関して誤差項の正規性の仮定の下でかなり汎用性の高い一般的かつ計算可能な必要・十分条件を導き，その条件をモデルに反映させつつ推定するアルゴリズムを提示した。この論文は刮目すべきものであり，Kilian and Lütkepohl（2017）にかなり詳細に紹介されているにも拘らず，実証分析においてはあまり利用されていないように感じられる。上で指摘した経済時系列分析のパッケージの問題点とは，識別性の扱いが十分考慮されているのか判然としない場合が多いことである。

---

* 本稿はコロナ禍のため余儀なく行なった2020年度本学大学院におけるオンライン講義の補助資料として作成された講義ノートの一部に加筆したものである。コロナ禍がもたらした思わぬ副産物でもある。ここに講義を聴講し，また原稿を読んでくれた大学院生中西正君に感謝する。言うまでもなく本稿に何か誤りがあれば，それは筆者のみの責任である。また本研究は平成30年度～令和２年度の科学研究費基盤研究 C（一般）（課題番号：18K01555，研究課題「非ガウス型構造 VAR モデルの統計理論と応用」）の助成を受けて行われた。

** 広島経済大学・広島大学名誉教授

他方最近，従来とは異なる観点から識別性に関する新たな研究が現われ始めた。誤差項に正規性を仮定しない非正規型 SVAR モデルの研究である。非正規性を仮定することによって，正規性の仮定の下では識別できなかったモデルが識別可能になることが分かってきたのである。この方向は，機械学習の分野では古くから知られている独立成分分析（Independent Component Analysis; ICA）といわれる手法を SVAR モデルに応用するものである。Lanne, Meitz, and Saikkonen（2017）及び Gouríeroux, Monfort, Renne（2017）は，非正規型 SVAR モデル（以下 NG-SVAR）の識別性と推定の問題に関して，この分野の最先端の研究成果を上げている。筆者も最近のこの分野に関心を持っている[1)] ので，これらの著書及び論文を大変興味深く読んだ。これらの著書・論文ではモデルとその前提条件が少しずつ異なっているので，それらの相互関係，含意などを明確にすることは意味深いと思われる。そこで本稿ではこれらの点について（Ⅰ），（Ⅱ）の２回に分けて考察する予定である。本稿（Ⅰ）では主として正規性の下での SVAR 及び構造 Vector Error Correction Model（VECM）をそれぞれ Rubio-Ramírez et al.（2010）及び Lütkepohl（2005）に従って考察し，彼らが求めた識別性に関する諸定理とそれに基づくアルゴリズムを実例を挙げながら紹介する。そして（Ⅱ）においては，Lanne et al.（2017）及び Gouríeroux et al.（2017）らの非正規 SVAR モデルを取り上げ，両者の関係性について考察を加え，若干の応用例を示す予定である。

2.　SVAR モデルと誘導形

2. 1　SVAR モデルの表現形式

時点 t における n 変数を含む時系列ベクトル $y_t = \left(y_{t1}, \cdots, y_{tn}\right)'$ を考えよう。y_t に対する標準的な n 次元 SVAR モデルは

$$B_0 y_t = B_1 y_{t-1} + \cdots + B_p y_{t-p} + c + w_t, \quad 1 \le t \le T \tag{1}$$

と表される。ここに $B_i, i = 0, \cdots, p$ は $n \times n$ の係数行列，c は $n \times 1$ の定数行列である。当面 y_t の要素は全て単位根を持つ I(1) 系列であるとする。w_t は平均ベクトル $\mathbf{0}$，分散共分散行列 Σ_w を持つ誤差項である。w_t に含まれる n 個の要素 $w_{1t}, \cdots, w_{nt}$ は互いに独立で全ての標準偏差は１になるように標準化されていると仮定する。従って $\Sigma_w = I_n$ である。

このタイプのモデルはしばしば B タイプと呼ばれる（Lütkepohl（2005））。本稿ではこの B タイプを扱う。経済時系列では w_t の経済的含意を示したいときに，これを構造ショックと呼ぶ。B_0 はモデルに含まれる n 変数の相互間の同時的な関係を表す非特異なパラメータ行列である。この SVAR モデルには通常定数項ベクトル c が含まれるのであるが，定数項 c を省略しても以下の議論の一般性を失わないので，省略する。（1）式はラグオペレータ L を用いて簡潔に

$$B(L) y_t = w_t$$

と書ける。ここに

$$B(L) = B_0 - B_1 L - B_2 L^2 - \cdots - B_p L^p$$

である。

次に（1）式の両辺の左から B_0^{-1} を掛けると

$$B_0^{-1} B_0 y_t = B_0^{-1} B_1 y_{t-1} + \cdots + B_0^{-1} B_p y_{t-p} + B_0^{-1} w_t$$

を得る。ここで $A_i = B_0^{-1} B_i, i = 1, \cdots, p$, $u_t = B_0^{-1} w_t$ と置けば

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t \tag{2}$$

となる。この式を SVAR モデルの誘導形という。誘導形は先と同様にラグオペレータを使って簡潔に

$$A(L)y_t = u_t$$

と表される。ここに

$$A(L) = I_K - A_1L - A_pL^2 - \cdots - A_pL^p$$

である。また $u_t = B_0^{-1}w_t$ の関係から容易に確かめられるように u_t の共分散行列 Σ_u は

$$\Sigma_u = B_0^{-1}B_0^{-1\prime}$$

となる。ここで（2）式の両辺から y_{t-1} を引き，整理すると次の式が得られる。

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \Gamma_1\Delta y_{t-1} + \cdots + \Gamma_p\Delta y_{t-p} + u_t \quad (3)$$

ここに

$$\Pi = -\left(I_K - A_1 - \cdots - A_p\right)$$
$$\Gamma_i = -\left(A_{i+1} + \cdots + A_p\right)$$

である。先に $y_t \sim I(1)$ と仮定したので，（3）式の左辺は I(0) である。また右辺の第 2 項以降は全て I(0) である。従って（3）式の両辺が整合的であるためには Πy_{t-1} は I(0) でなければならない。このことは，y_t の要素の間に r 個（$0 < r < n$）の共和分関係が存在することを意味する。そして Π の階数は $r(<n)$ となる。このとき Π は，サイズ $n \times r$ の 2 つの行列 α と β を使って次のように分解される：

$$\Pi = \alpha\beta'$$

したがって（3）式は

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \Gamma_1\Delta y_{t-1} + \cdots + \Gamma_p\Delta y_{t-p} + u_t \quad (4)$$

と書くことができる。先に Πy_{t-1} は I(0) でなければならないとしたので，y_{t-1} に含まれる n 個の I(1) 変数 $\left(y_{t1},\cdots,y_{tn}\right)'$ の線形結合 $\beta' y_{t-1}$ は共和分関係にある。この β' を共和分行列といい，β' の階数 r を共和分ランクという。また（4）式を誤差修正モデル（vector error correction model）といい，以下 VECM と表す。

最後に SVAR モデルに関するもう一つの別表現を挙げておく。上の仮定の下では，y_t は下に示すような 3 つの項に分解することができることが知られている。すなわちモデルは I(1) の項，I(0) の項，及び初期値の 3 つの和として

$$\begin{aligned} y_t &= \Xi \textstyle\sum_{i=1}^{t} u_i + \sum_{j=0}^{\infty} \Xi_j^* u_{t-j} + y_0^* \\ &= \Upsilon \textstyle\sum_{i=1}^{t} w_i + \sum_{j=0}^{\infty} \Xi_j^* u_{t-j} + y_0^* \end{aligned} \quad (5)$$

と表現できる。この形式をグレンジャーの表現定理（Granger representation theorem）という。ここに係数行列 Ξ は階数 $n-r$ を持つ行列

$$\Xi = \beta_\perp \left[\alpha'_\perp \left(I_K - \textstyle\sum_{i=1}^{p-1}\Gamma_i\right)\beta_\perp\right]^{-1} \alpha'_\perp \quad (6)$$

と定義される。また $\alpha_\perp, \beta_\perp$ は α, β の直交補空間を表す。また $\Upsilon = \Xi B_0^{-1}$ である。

この式の右辺第 1 項はランダムウォークに従う $\sum_{i=1}^{t} u_i$ に係数行列 Ξ を掛けたものなので I(1) 過程である。第 2 項の $\sum_{j=0}^{\infty} \Xi_j^* u_{t-j}$ は定常な I(0) 過程である。第 3 項はシステムの初期値である。システムは主として第 1 項によって駆動される。（5）式は次のように別の面から解釈することができる。第 1 項に Ξ の定義式を代入すると

$$\beta_\perp \left[\alpha'_\perp \left(I_K - \sum_{i=1}^{p-1}\Gamma_i\right)\beta_\perp\right]^{-1} \alpha'_\perp \sum_{i=1}^{t} u_i$$

となるが，この式の

$$\alpha'_\perp \sum_{i=1}^{t} u_i$$

を common trend という。この common trend は，$\beta_\perp \left[\alpha'_\perp \left(I_K - \sum_{i=1}^{p-1}\Gamma_i\right)\beta_\perp\right]^{-1}$ を介してシステムに伝達され y_t が駆動されているとみることができる。

係数行列 Υ は長期インパクト乗数と呼ばれ，SVAR モデルに経済理論に基づく長期制約を導入する際に重要な役割を果たす。Blanchard - Quah（1989）は，米国の実質 GDP と失業率 UR から成る SVAR モデルに長期インパクト乗数

行列を使って経済理論に基づく長期制約を課す方法を示した初めての論文である。彼らのモデルでは GDP（∼I(1) 変数）の対数階差 Δgdp_t, と UR（∼I(0) 変数）の対数値 ur が用いられた。そして gdp_t と ur_t に対する構造ショックをそれぞれ総供給ショック w_t^{AS} と総需要ショック w_t^{AD} とし，それらをベクトル $w_t = \left(w_t^{AS}, w_t^{AD}\right)'$ にまとめた。これらの変数による SVAR を Granger 表現に書き換えると

$$y_t = \begin{pmatrix} gdp \\ ur_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} \end{bmatrix} \sum_{i=1}^{t} w_i + \cdots$$

となる。ここに長期的効果を持たない第2項以降は省略した。彼らは経済学的観点から，総需要ショック w_t^{AD} は実質 GDP に長期効果を与えないと仮定した。この仮定は $\zeta_{12}=0$ を意味する。このように，Υ を通して長期制約を与えることができる。

2.2 識別問題

Σ_u の代わりに誘導形の OLS 残差 $\hat{u}_t$ の共分散行列 $\hat{\Sigma}_u$ を使って構造形パラメータ B_0 を一意的に推定できるかどうかという問題を識別性の問題という。モデル（1）の標準的な識別性条件として Rothenberg（1971）の位数条件（order condition）：

B_0 に含まれる未知パラメータの個数 $\geq$ $n(n-1)/2$

が用いられる。位数条件を満すために最もよく使われる方法は B_0 に含まれるいくつかの要素をゼロと置く制約（ゼロ制約，より一般的には線形制約）を課す方法である。制約の課し方はそのほかにもいろいろあるが，当面ゼロ制約に限定して話を進める。計量経済学の同時方程式において，またその後にも VAR モデルの初期の段階において，位数条件の設定の仕方が恣意的であるとの批判がなされた（例えば Sims（1980））。その後，位数条件の設定に際して経済理論との整合性に注意が払われるようになった。さてゼロ制約を課すことによって位数条件が満たされたとしよう。しかしそれだけでは誘導形から構造パラメータが一意的に識別できるとは限らない。位数条件は識別可能の必要条件にすぎないからである。十分条件に関する研究はいろいろあるが，中でも Rubio-Ramírez et al.（2010）は最も一般的な形で必要・十分条件を，しかもチェック可能な形で導いただけでなく，さらに必要・十分条件をチェックしつつ推定を行うアルゴリズムを提示している。この論文は上に述べたように重要な論文であるが，少々分かりにくいので，以下においてこの論文の要点を整理し，彼らの必要・十分条件とアルゴリズムを具体的な応用例を上げながら紹介する。

2.3 Rubio-Ramírez et al.（2010）の SVAR 表現形式

2.1節に示した SVAR モデルの標準的な表現形式を（定数項は省略して）再掲する。

$$B_0 y_t = B_1 y_{t-1} + \cdots + B_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad for\ 1 \leq t \leq T, \qquad \text{(1再掲)}$$

ここで B_0 の逆行列が存在すると仮定する。このシステムでは初期値 $y_0, \cdots, y_{1-p}$, が与えられた時，観測値 y_t が生成される。ε_t は n 次元正規分布 $N(0, I)$ に従うとする。ここで右辺に現れる係数行列を集めた行列を

$$B = \left[B_1, \ldots., B_p\right]$$

とする。行列 B の次元は $n \times m$，ただし $m = np$ である。これらの記号を使えば，SVAR モデルのパラメータ全体は (B_0, B) となる。2.1節に示したように（1）式は

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t \qquad \text{(2再掲)}$$

と変形される。ここで表記を簡単にするため次

の記号を導入する：

$$Y_{t-1} = \left[y_{t-1},\ldots,y_{t-p}\right],\ 1 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}$$
$$A = \left[A_1,\cdots,A_p\right]$$

これらの記号を使えば，モデル（2）はコンパクトに

$$y_t = AY_{t-1} + u_t \tag{2'}$$

と表すことができる。これは SVAR モデル（1）の誘導形である。ここに

$$A = B_0^{-1}B,\ u_t = B_0^{-1}\varepsilon_t,$$
$$\mathrm{E}[u_t u_t'] = \Sigma_u = \left(B_0 B_0'\right)^{-1}$$

である。誘導形パラメータの集合を $\left(A,\Sigma_u\right)$ とする。ただし Σ_u は対称な正定符号（symmetric and positive definite）行列である。

今後，すべての構造パラメータ $\left(B_0,B\right)$ の集合を $\mathbb{P}^S$ によって表す。集合 $\mathbb{P}^S$ は，$\left(\mathrm{n}+\mathrm{m}\right)\mathrm{n}$ 次元実数空間 $R^{(\mathrm{n+m})\mathrm{n}}$ における開かつ稠密部分集合である。またすべての誘導形パラメータの集合 $\left(A,\Sigma_u\right)$ を $\mathbb{P}^R$ によって表す。Σ_u は対称行列なので未知パラメータの数は n (n + 1)/2 である。したがって $\mathbb{P}^R$ は，$\left(\mathrm{n}+\mathrm{m}\right)\mathrm{n}$ 次元実数空間 $\mathbb{R}^{(\mathrm{n+m})\mathrm{n}}$ 内の nm + n (n + 1)/2 次元部分空間である。今後，構造パラメータ $\left(B_0,B\right)$ を $k \times n$ $(0 < k \le n)$ の行列に変換する関数を $f\left(\ \right)$ と表す。例えば関数

$$f\left(B_0,B\right) = \left(B_0 - \sum_{l=1}^{p} B_l\right)^{-1} = \left(I_n - \sum_{l=1}^{p} A_l\right)^{-1} B_0^{-1}$$

を考えよう。この例では $k = n$ であるので，右辺は $n \times n$ の行列である。またこの時，関数 $f\left(\ \right)$ の定義域は $\mathbb{P}^S$ の中の $B_0 - \sum_{l=1}^{p} B_l$ の逆行列が存在する領域 $U \subset \mathbb{P}^S$ に限定される。

今後しばしば変換後の行列のいくつかの要素にゼロ制約を課すことになるが，そのような制約は

$$Q_j f\left(B_0,B\right)e_j = 0$$

という形に書ける。ここに Q_j は行列 $f\left(\ \right)$ の中から特定の要素を取り出す選択行列，e_j は単位行列 I_k の第 j 列を表す。例えば

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, f\left(B_0,B\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$
$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であれば，

$$Q_1 f\left(B_0,B\right)e_1 =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{31} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるから，$Q_j f\left(B_0,B\right)e_j = 0$ は $a_{11} = a_{31} = 0$ というゼロ制約を置いたことになる。ここで関数 $f\left(\ \right)$ の性質を表す用語を挙げておく。

（**可換**）：行列 $A \subset U$ と直交行列 P に対して $f\left(AP\right) = f\left(A\right)P$ となるとき，$f\left(\ \right)$ は**可換**（**commute**）であるという。

例：A を $\left(A'\right)^{-1}$ に変換する関数 $f\left(A\right) = \left(A'\right)^{-1}$ を考える。このとき直交行列 P を右からかけた AP に対して変換 $f\left(AP\right)$ を行うと，P の直交性，転置行列と逆行列の基本演算法則より

$$f\left(AP\right) = \left(A'\right)^{-1}P = f\left(A\right)P$$

となるから $f\left(\ \right)$ は可換である。

性質 1（許容性）構造パラメータ (B_0,B) と任意の直交行列 P に対して変換関数 $f\left(\ \right)$ が

$$f\left(B_0 P, BP\right) = f\left(B_0,B\right)P$$

となるとき（そしてその時のみ）変換関数 $f\left(\ \right)$ は許容（admissible）であるという。

性質 2（正則性）定義域 U を持つ変換関数 $f(B_0P,BP)$ において U が開でありかつ $f(\ )$ は連続微分可能で1回の微分行列 $f'(B_0P,BP)$ の階数が $k\times n$ であるとき（そしてその時にのみ），この関数は正則（**regular**）であるという。

性質 3（強正則性）定義域 U を持つ変換関数 $f(\ )$ が正則でありかつ $f(U)$ が $k\times n$ の行列の集合において稠密であるとき，そしてその時にのみ，$f(\ )$ は強正則（strongly regular）であるという。

先に進む前に上に示した記号を使って，今後よく使われる2,3の概念と用語を簡単に説明しておく。まず初めに「**観測値上同等**」という概念を説明する。いま構造パラメータ空間上の2点 (B_0, B) と $(\tilde{B}_0, \tilde{B})$ を考える。もしこれらの点に対応する構造方程式が，同じ分布に従う観測値 $y_t=(y_{1t},\cdots,y_{nt})'$ を生成するならば，そしてその時にのみ，これら2点 (B_0, B) と $(\tilde{B}_0, \tilde{B})$ は観測値上同等であるという。さらにもしモデルが線形ガウスモデルであれば，次のように言い換えることができる。すなわち二つの構造パラメータ (B_0, B) と $(\tilde{B}_0, \tilde{B})$ が同じ誘導形パラメータ (A, Σ_u) を持てば，そしてその時にのみ，(B_0, B) と $(\tilde{B}_0, \tilde{B})$ は観測値上同等である。さらに言い換えれば，(B_0, B) と $(\tilde{B}_0, \tilde{B})$ に対して $B_0 = \mathrm{P}\tilde{B}_0$ かつ $B = \mathrm{P}\tilde{B}$ となるある直交行列 P が存在すれば，そしてその時にのみ (B_0, B) と $(\tilde{B}_0, \tilde{B})$ は観測値上同等である。なぜならば（2′）の $\mathrm{A} = B_0^{-1}B$ という関係式に，$B_0 = \mathrm{P}\tilde{B}_0$ および $B = \mathrm{P}\tilde{B}$ を代入すると $\mathrm{A} =(P\tilde{B}_0)^{-1}\mathrm{P}\tilde{B}= \tilde{B}_0^{-1}\tilde{B}$ となる。すなわち点 $(\tilde{B}_0, \tilde{B})$ もまた同じ誘導形パラメータ A をもたらすので，(B_0, B) と $(\tilde{B}_0, \tilde{B})$ は観測値上同等である。

次にパラメータ空間上において，下に述べる制約条件を満たすある空間「**領域 R**」について定義する。まず初めに構造パラメータの符号は何らかの（経済理論等に下づく）基準によって定められているとする。その基準を満たす (B_0, B) の集合を N で表す。また変換関数 $f(\ )$ の定義域を U とする。このような条件を満す集合は

$$(B_0,B)\in U\cap N$$

と書ける。さらにこの (B_0, B) に対して，

$$Q_jf(B_0,B)e_j=0,\ for\ 1\le j\le n$$

というゼロ制が課されたときの (B_0, B) の集合を R で表す。すなわち記号で表せば

$$R=\left\{(B_0,B)\in U\cap N\,|\,Q_jf(B_0,B)e_j=0, for\ 1\le j\le n\right\}$$

と書くことができる。今後この R を「**領域 R**」と呼ぶ。

以上の概念と記号を使って以下の重要用語を定義する。

定義 1（広域的識別性 global identification）
構造パラメータ (B_0, B) が広域的に識別可能であるための必要・十分条件は，広域的に観測値上同等なパラメータ点が他に存在しないことである。

定義 2（局所的識別性 local identification）
構造パラメータ (B_0, B) が局所的に識別可能であるための必要・十分条件は，(B_0, B) の近傍に観測値上同等なパラメータ点が他に存在しないことである。

定義 3（正確な識別性 exact identification）
領域 R で定義される SVAR モデルを考える。このモデルの誘導形パラメータ空間上のほとんどすべての点 (A,Σ_u) に対して，領域 R 内に唯一の構造パラメータ点 (B_0, B) が存在するとき，そしてその時にのみ SVAR モデルは正確に識別されるという。

2.4　識別性制約

前節では SVAR モデルはパラメータに何らかの制約を設けなければ，誘導形から構造形を復元できない（すなわち識別できない）ことが示された。係数制約にはいろいろなタイプがあるが，短期制約，長期制約，線形制約，非線形制約，及びこれらの混合などに大別される。また非定常時系列が存在する場合を含めると係数制約はさらに多様化する。典型的な二つの場合を挙げておく。

短期線形制約：構造パラメータ（B_0, B）の要素に対して線形制約を置く。代表的な例はB_0は下側三角行列という制約である。この制約は変数間に同時的循環的な関係を想定するような場合に用いられる。

長期非線形制約：

ラグ多項式 $B(L)=B_0-\sum_{l=1}^{p}B_lL^l$ において

$$B(1)^{-1}=\left(B_0-\sum_{l=1}^{p}B_l\right)^{-1}$$

はインパルス応答関数の係数行列を表す。この行列に対する制約は長期非線形制約である。なぜならば $B(1)^{-1}$ の要素は構造パラメータ B_0, B_l の要素の非線形関数であり，かつ $B(1)^{-1}$ は時点 t に与えられたショックの無限に遠い時点に至るまでの長期にわたるインパルス－レスポンスの累積反応を包含しているからである。

この点を明示するために Rubio-Ramírez et al.（2010）は記号 $IR_\infty(B_0,B)$ を導入し，

$$IR_\infty(B_0,B)=\left(B_0-\sum_{l=1}^{p}B_l\right)^{-1}$$
$$=\left(I_K-\sum_{l=1}^{p}A_l\right)^{-1}B_0^{-1}$$

とした。

長期制約の例：Blanchard and Quah（1989）は二つの $I(0)$ 変数：米国の実質 GDP（階差）Δgdp_t と失業者数 ur_t から成るモデル

$$\begin{pmatrix}\Delta gdp_t\\ ur_t\end{pmatrix}=B(L)^{-1}\begin{pmatrix}w_t^{AS}\\ w_t^{AD}\end{pmatrix}$$

を考察した。ここに w_t^{AS}（総供給ショック）と w_t^{AD}（総需要ショック）は Δgdp_t と ur_t に対する外生的ショックである。そして彼らは「w_t^{AD} は実質 GDP に対して長期的効果を与えない」という制約を課した。2 変数モデルの場合は $IR_\infty(B_0,B)$ は2×2行列であるから，簡略化して

$$IR_\infty(B_0,B)=\begin{pmatrix}\theta_{11}&\theta_{12}\\ \theta_{21}&\theta_{22}\end{pmatrix}$$

と置くと，上の制約は次のように表わさられる。

$$\begin{pmatrix}\Delta gdp_t\\ ur_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta_{11}&0\\ \theta_{21}&\theta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_t^{AS}\\ w_t^{AD}\end{pmatrix}$$

またこの制約は，Granger の表現定理に現れる Ξ を使って $\Xi=\begin{bmatrix}\xi_{11}&0\\ \xi_{21}&\xi_{22}\end{bmatrix}$ と表すこともできる（この関係については 4 節で再述する）。

3.　Rubio-Ramírez et al.（2010）の定理とアルゴリズム

Rubio-Ramírez et al.（2010）の定理を説明する前に，簡単な例を使って具体的イメージを形成しておこう。そのためには順序が逆ではあるが，彼らの提唱するアルゴリズムを先に見ておくとイメージが掴みやすい。

まず初めに Rubio-Ramírez et al. 理論とアルゴリズムにとって最も重要な役割を持つ次のような行列 Q_j' を導入する。この行列 Q_j' は，$1\le j\le n$ を満たす j に対して，ある $k\times n$ の行列 X を次式の右辺のように変換する関数である。

$$Q_j'(X)=\begin{bmatrix}Z_jX\\ I_j\quad \mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

ここに現れる各行列のサイズは以下のとおりである。

$Q'_j:(k+j)\times n, Z_j:k\times k, I_j:j\times j$ の単位行列，$\mathbf{0}:j\times(n-j)$ のゼロ行列。

この定義だけから具体的なイメージを形成することは困難なので，Rubio-Ramírez et al.（2010）が例示に用いた簡単な3変数モデル（以下，Rubio-Ramírez et al. 3変数モデル，同書 p. 684）を使って説明しよう。3変数とは次にあげる3つの米国の四半期マクロ変数である。それらの変数は，Δgnp_t（実質 GNP の対数階差），Δp_t（GNP デフレータ，対数階差），i_t，（連邦国債利子率）である。データ期間は1954年第4四半期から2007年第4四半期である。gnp_t と p_t はいずれも I(1) なので階差が用いられている。3変数をベクトル

$$z_t=(\Delta gnp_t, i_t, \Delta p_t)'$$

にまとめる。そしてこのモデルには識別性のゼロ制約として

1）金融政策ショック w_t^{policy} は短期的にも長期的にも gnp に影響を与えない，
2）総需要ショック w_t^{AD} は長期的に gnp に影響を与えない，
3）総供給ショック w_t^{AS} のみが gnp に長期的に影響を与える，

という3つの制約が課せられている。これらの制約は行列を使えば

短期制約は　$B_0^{-1}=\begin{bmatrix}0&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{bmatrix}$

長期制約は　$\Theta(1)=A(1)^{-1}B_0^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{bmatrix}$

と表される。ここに0はゼロ制約があることを，* は制約が無いことを表す。これらの二つの制約を行列の形にまとめると

$$L=\begin{bmatrix}L_0\\ L_\infty\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_0^{-1}\\ \Theta(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\\ 0&0&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{bmatrix}$$

と表わされる。L_0は短期制約を，L_∞ は長期制約を表す。これを表の形にまとめておく。

	w_t^{policy}	w_t^{AD}	w_t^{AS}	
gnp_t	0	*	*	短期制約
i_t	*	*	*	
p_t	*	*	*	
gnp_t	0	0	*	長期制約
i_t	*	*	*	
p_t	*	*	*	

例えばこの表の第1列は，金融政策ショック w_t^{policy} は短期的にも長期的にも gnp に影響を与えないことを示している。第2列は，総需要ショック w_t^{AD} は長期的に gnp に影響を与えないことを，また第3列は，総供給ショックは短期的にも長期的にもゼロ制約は存在しないことを表している。この表に基づいて，Rubio-Ramírez et al. のアルゴリズムに示されている **Step 1, 2, 3** を実行する。

Step 1　$Z_j, j=1,2,3$ 行列を次のように構成する。となる。

（1）Z_1 の構成法

Z_1 は L 行列の第1列から，構造ショック w_t^{policy} に関するゼロ制約を課す要素を取り出す選択行列として定義される。この場合 Z_1 は

$$Z_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

となる。

（2）Z_2 の構成法

Z_2 は L 行列の第 2 列から，構造ショック w_t^{AD} に関するゼロ制約を課す要素を取り出す選択行列として定義される。したがって

$$Z_2=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

となる。

（3）Z_3 の構成法

Z_3 は L 行列の第 3 列から，構造ショック w_t^{AS} に関するゼロ制約を課す要素を取り出す選択行列として定義される。したがって

$$Z_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

となる。

Step 2　以上で求めた行列 Z_1,Z_2,Z_3を使って，Q_1',Q_2',Q_3' を順次，以下のように定める。

$j=1$ のとき $Q_1'=Z_1L$ とする。この Q_1' に対して $Q_1'q_1=0$ となるような q_1を見つける。そのような q_1は QR 分解 $Q_1'=\tilde{Q}R$ を使って見つけることができる。この時 $\tilde{Q}$ は直交行列，R は上側三角行列である。R の最後の列を q_1とすればよい。

$j=2$ のとき $Q_2'=\begin{bmatrix}Z_2L\\q_1'\end{bmatrix}$ とする。上と同様に Q_2' を QR 分解し R の最後の列を q_2とする。

$j=3$ のとき $Q_3'=\begin{bmatrix}Z_3L\\q_1'\\q_2'\end{bmatrix}$ とする。上と同様に Q_3' を QR 分解し R の最後の列を q_3とする。

以上の過程では行列 L に含まれる B_0^{-1} 及び $\Theta(1)$ の数値が必要になるが，それらは誘導形推定値から計算される $\hat{B}_0^{-1}$ と $\hat{\Theta}(1)$ を仮の値として入れる。

Step 3　$j=n$ まで来たら終了。この例では $n=3$。以上から得られた $q_j, j=1,2,3$ を並べた行列を

$$Q=\left[q_1,q_2,q_3\right]$$

とする。このとき B_0^{-1} の推定値は

$$B_0^{-1}=L_0Q'$$

によって与えられる。

以上が Rubio-Ramírez et al. のアルゴリズムであるが，上に定義した行列を使ってさらに次のような行列を定義する。

$$M_j(L)=\begin{bmatrix}\multicolumn{2}{c}{Z_jL}\\I_j & 0_{(j\times(n-j))}\end{bmatrix}$$

ここに I_j は j 次の単位行列，$0_{(j\times(n-j))}$ は $j\times(n-j)$ のゼロ行列である。以上で Rubio-Remírez et al. の定理を述べる準備ができた。

定理 1（Theorem 1, Rubio-Ramíre et al.（2010）p. 672）

領域 R に属し許容（admissible）な制約を満たす SVAR モデルを考える。もし SVAR モデルの係数 (B_0, B) が R に属し，$1\le j\le n$ に含まれるすべての j に対して，上に定義した M_j 行列の階数が n であるとき，この SVAR モデルはパラメータ点 (B_0, B) において広域的に（globally）に識別される。

しかし定理 1 は広域的に（globally）識別性の必要条件にすぎない。次の定理は必要・十分条件を与える。

定理 2（Theorem 6, Rubio-Ramíre et al.（2010）p. 676）

領域 R に属し許容（admissible）かつ強正則

な制約を満たす SVAR モデルを考える。このSVAR モデルが正確に識別[2]であるための必要・十分条件は，制約の数が $n(n-1)/2$ であり，かつ定理１の階数条件が満たされることである。

以上の定理で示される識別性の条件は数値上または式の上でチェックすることが出来るという意味では実用的であるが，M 行列を構成しその階数を調べる手間が必要になる。しかし次の定理は，このような手続きは必要とせず，式ごとの制約条件の数を数えるだけで必要・十分条件性をチェックできることを示している。従って次の定理は理論性と実用性を備えた極めて強力な定理であるといえる。

定理３（Theorem 7, Rubio-Ramíre et al.（2010）p. 676）

領域 R に属し許容（admissible）かつ強正則な制約を満たす SVAR モデルを考える。この SVAR モデルが正確に識別であるための必要・十分条件は，$1 \le j \le n$ を満たす j 番目の式に含まれる制約の数を r_j とするとき，$r_j = n - j$ となることである。

ここで「正確に識別」に関して回転行列（Rotation matrix P），及び下三角行列について言及しておく。実証分析においてはしばしば，構造パラメータ B_0 は下三角行列と仮定されることが多い。その理由は二つある。第一に，B_0 が下三角行列であるということは，同時期内では変数の間に因果序列が存在することを意味するので，経済的な因果序列が存在するときはこの形がふさわしいからである。もう一つの理由は，この仮定に立てばモデルが正確に識別されるからである。第一の理由を重視する場合には，経済変数間の因果序列が分かっていなければならないが，実際にはそれらは未知なので，実証分析においては，因果序列の可能性が高い変数の並びをいくつか実証してみて当てはまりの良い変数並びを採用することになる。第２の理由に関して，見逃されやすいことであるが，下三角行列でない場合でも「正確な識別」が成立する場合があることに注意しなければならない。次節の応用例１はこのことを示している。

次に「正確に識別」である場合には，ある種の回転行列（Rotation matrix P）が対応している点を説明する。上に述べた「正確な識別性」の定義３はこの点を明言している。そしてこの定義の下で Rubio-Ramíre et al.（2010）は「正確な識別性」に関する次の定理を示している。

定理４（Theorem 5, Rubio-Ramíre et al.（2010）p. 675）

領域 R に属する構造パラメータ (B_0, B) をもつ SVAR モデルを考える。いまある直交行列 P によって (B_0, B) を (B_0P, BP) に変換したとき，変換後の (B_0P, BP) が領域 R に属すような変換行列 P がただ一つしか存在しないとき，そしてその時にのみこの SVAR モデルは正確に識別される。

そしてこのような P は，Rubio-Ramírez et al. のアルゴリズムの過程で得られた行列

$$[q_1, q_2, q_3]$$

で与えられるのである（Rubio-Ramírez et al. p. 685～686の例題を見よ）。

4.　応　　用　　例

Rubio-Ramírez et al.（2010）は，彼らの定理を使って既存のいくつかの SVAR モデルの識別性をチェックし，興味深い結果を得ているので，ここにそれらの２，３の例を紹介しておく。

例１　**Rubio-Ramírez** ３変数モデル

３節で紹介した Rubio-Ramírez ３変数モデル

を使いながら Rubio-Ramírez et al. のアルゴリズムを追ってみよう。前節において L, Z_1, Z_2, Z_3 は

$$L=\begin{bmatrix}0&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\\ 0&0&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{bmatrix}$$

$$Z_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$Z_2=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$Z_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

であった。ここで L 行列の上半分，すなわち構造パラメータ B_0 は下三角ではないことに注意。これらの式から，第１，２，３式の制約の数は $r_1=2, r_2=1, r_3=0$ であること分かる。従ってこのモデルは定理３の意味で（B_0 は下三角行列ではないが）正確に識別される。続いて以上に示された L 及び Z_1, Z_2, Z_3 を使って $Q_1=Z_1L, Q_2=Z_2L, Q_3=Z_3L$ を求め，最後に M 行列の定義

$$M_j(L)=\begin{bmatrix}Z_jL\\ I_j \quad 0_{(j\times(n-j))}\end{bmatrix}$$

に従って M_1, M_2, M_3 を求めると

$$M_1=\begin{bmatrix}0&*&*\\ *&*&*\\ 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ M_2=\begin{bmatrix}*&*&*\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

$$M_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

が得られる。ここに＊は非ゼロの任意の数を表わす。これから M_1, M_2, M_3 の階数は全て３であることが示されたので，定理２の条件が満たされる。また位数条件 $\frac{n(n-1)}{2}=3$ も満たされているので，$r_1=2, r_2=1, r_3=0$ と併せて，このモデルは定理２の意味で正確に識別される。

例２　**Leeper et al.**（1996）モデル

Rubio-Ramírez et al.（2010）は，Leeper et al.（1996）のモデルに対して彼らの諸定理を応用し，ここでも興味深い結果を示している。そのモデルとは次のような，物価指数 $P_{c,t}$，産出高 Y_t，名目短期利子率 R_t に関するラグ１の SVAR モデルである。

$$a_{11}\Delta logP_{c,t}+a_{31}R_t=$$
$$\quad c_1+b_{11}\Delta logP_{c,t-1}+b_{21}\Delta logY_{t-1}+b_{31}R_{t-1}+\varepsilon_{1,t},$$

$$a_{12}\Delta logP_{c,t}+a_{22}\Delta logY_t=$$
$$\quad c_2+b_{12}\,logP_{c,t-1}+b_{22}\Delta logY_{t-1}+b_{32}R_{t-1}+\varepsilon_{2,,t},$$

$$a_{13}\Delta logP_{c,t}+a_{23}\Delta logY_t+a_{33}R_t=$$
$$\quad c_3+b_{13}\,logP_{c,t-1}+b_{23}\Delta logY_{t-1}+b_{33}R_{t-1}+\varepsilon_{3,t},$$

このモデルは次のような経済学的意味を持って

いる。左辺は現在時点 t 期における変数間の同時的（contemporaneous）関係を表している。第１式はマネタリ政策に関する式であるが，現在時点 t 期の産出高データ $logY_t$ が含まれていない。なぜならば産出高データは利子率に対して鈍い反応しか示さないからであり，また産出高データは期末に発表されるので，その期の利子率の影響を受けにくいからである。さらに後で見るように識別性条件として貨幣政策は産出高に対して長期的効果を持たないという制約が課される。この制約は経済学で広く知られている「貨幣の長期的中立性」を意味している。後に「貨幣の長期的中立性」は成立しないという仮定の下での分析をも行う。第２式は最終財生産者の行動を表す式である。産出高は速やかに財価格に反応する。なぜならば各種の財は生産のためにも投入されるからである。他方，この式の左辺に利子率 R_t が含まれていない。その理由は，産出高の利子率の変化に対する反応は鈍いと考えられるからである。第３式の左辺にはすべての変数が含まれている。以上からこのモデルは，左辺の係数行列に $a_{21}=a_{32}=0$ というゼロ制約が課せられたことになる。

ここで上の SVAR モデルを見慣れた表現形式

$$B_0 y_t = c + B_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

に書き換えておこう。そして各行列の要素を次のように表す。

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & b_{13}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & b_{23}^0 \\ b_{31}^0 & b_{32}^0 & b_{33}^0 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{13}^1 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 & b_{23}^1 \\ b_{31}^1 & b_{32}^1 & b_{33}^1 \end{bmatrix}$$

この表記法を使えば，ゼロ制約は $b_{12}^0 = b_{23}^0 = 0$ となる。

従って短期制約行列は

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_{11}^0 & 0 & b_{13}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & 0 \\ b_{31}^0 & b_{32}^0 & b_{33}^0 \end{bmatrix}$$

である。先ほど「貨幣の長期的中立性」を仮定したので長期制約行列は

$$IR_\infty = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

という形になる。ここに * はゼロ制約が課されていないことを表す。以上から構造パラメータの変換関数 $f()$ は

$$f(B_0, B) = \begin{bmatrix} B_0' \\ IR_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^0 & b_{21}^0 & b_{31}^0 \\ 0 & b_{22}^0 & b_{32}^0 \\ b_{13}^0 & 0 & b_{33}^0 \\ * & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

と書ける。これより第 1, 2, 3 式のゼロ制約の個数を数えれば，$r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = 0$ であるので定理３から正確に識別される。

次に Rubio-Remírez et al.（2010）は，仮定を変えて（i）「財市場のストックは産出高に長期的効果を持たない」，及び（ii）「貨幣の長期的中立性は成り立たない」としたときのモデルの識別性をチェックしている。この場合，変換関数は次のようになる。

$$f(B_0, B) = \begin{bmatrix} B_0' \\ IR_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^0 & b_{21}^0 & b_{31}^0 \\ 0 & b_{22}^0 & b_{32}^0 \\ b_{13}^0 & 0 & b_{33}^0 \\ * & * & * \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

したがって，$r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1$ であるから定理

３の条件を満たさないので，このモデルは正確に識別されない。この例は，伝統的な位数条件（order condition）は両者とも $\frac{n(n-1)}{2}=3$ は満たされているが，貨幣の長期中立性仮定の下では正確に識別でき，その仮定を否定した場合には識別できないことがあるという例である。

例３　５変数貨幣的 **SVAR** モデル（Rubio-Remírez et al.（2010）p. 678〜679）

このモデルは Rubio-Remírez et al.（2010）の中で例題として挙げられており，その中で Z 行列と M 行列が示されているので，その結果を使えば以下のことが言える。まず得られた Z 行列から，$r_1=4, r_2=3, r_3=3, r_4=1, r_5=0$ であることが示される。これより $\sum_{j=1}^{5} r_j=11$ であるから位数条件 $\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2}=10$ を上回っているのでこのモデルは必要条件を満たしている（したがって識別可能であるかもしれない)。この論文には十分条件を確認するために必要な M_j 行列が示されており，それらを吟味するとすべて M_j の階数を等しく n とするような b_{ij} が存在することが示される。したがってこのモデルは広域的に識別可能である。

なおここで Rubio-Ramírez et al. のアルゴリズムに現れた長期的効果を表す係数行列 IR_∞ と Granger 表現定理における長期乗数 Υ との関係について２点ほど留意点を述べておこう。長期乗数 Υ は共和分関係を含む VAR モデルが前提になっているのに対して，長期係数行列 IR_∞ は（たとえ I(1) 系列が含まれていても階差を取って定常化した後の）定常な VAR モデルにおける（無限遠点における）インパルス応答関数を表している。このように Υ と IR_∞ の両者の間には概念上の相違が存在するので，両者の理論とアルゴリズムが扱う範囲が完全には一致しない。しかし特殊な場合として y_t に含まれる変数が全て $I(1)$ で，しかも共和分関係が存在しない場合は，Υ と IR_∞ は完全に一致する。なぜならばこの場合には，共和分階数は $r=0$ であるから $\alpha=0, \beta=0$, したがって $\alpha_\perp=\beta_\perp=I_n$ であるから Ξ 行列は

$$\Xi=\left(I_n-\sum_{l=1}^{p} A_l\right)^{-1} B_0^{-1}$$

となる。これは Rubio-Ramírez et al. の IR_∞ 行列に一致する。従ってこの特殊な場合には Rubio- Ramírez et al. の理論とアルゴリズムは適用される。

最後に Ξ に課す長期制約と B_0^{-1} に課す短期制約の関係について注意事項を述べておく。行列 Ξ は構造パラメータ (B_0, B) の非線形な関数であるから，Ξ に課される制約と B_0^{-1} に課される制約は相互に関連しているので，まったく自由に双方に制約を課すと矛盾が生じる恐れがある。この点に関して Lütkepohl（2008）は，共和分階数が r のとき，B_0 に課すことができるゼロ制約の個数は $r-1$ を越えることはできないことを示している。また B_0^{-1} の識別性の必要十分条件については次節で述べる。

5.　VECM における識別性

この節では共和分関係が存在する SVAR モデルを考察する。言い換えれば多変量誤差修正モデル（Structural Vector Error Correction Model；以下 SVECM と表記する）の識別性の問題を考察する。そのために第２節で用いた記号を再度確認しておこう。第２節において変数間に共和分関係がある場合は，SVAR モデルはグレンジャーの表現定理により

$$y_t=\Xi\sum_{i=1}^{t} u_i+\sum_{j=0}^{\infty} \Xi_j^* u_{t-j}+y_0^*$$

と表されることを見た。ここで $u_t=B_0^{-1} w_t$ の関係を代入すれば

$$y_t = \Upsilon \sum_{i=1}^{t} w_i + \sum_{j=0}^{\infty} \Xi_j^* u_{t-j} + y_0^* \qquad \text{（5再掲）}$$

と表現できる。ここに $\Upsilon = \Xi B_0^{-1}$ である。Υ は長期インパクト係数とよばれる。ここに

$$\Xi = \beta_\perp \left[\alpha'_\perp \left(I_K - \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \right) \beta_\perp \right]^{-1} \alpha'_\perp \qquad \text{（6再掲）}$$

と定義される。また第２節で述べたように，この係数行列 Υ は構造ショックの長期的効果を表す。しかし Υ は短期制約行列 B_0^{-1} を含んでいるので，B_0^{-1} に課す短期制約と Υ に課す長期制約が整合的かどうか，また識別性条件を両者に矛盾なく課すにはどうすればよいかという疑問が生じる。この問題を解決するのが次の定理である。まず定理に使われるいくつかの記号を導入する。ここで記号の簡略化のため $\mathrm{B} = B_0^{-1}$ と置くことにする。さらに長期，短期制約を課す要素を取り出す選択行列（selection matrix）を次のように定義する。

$$C_{\Xi\mathrm{B}} vec(\Xi\mathrm{B}) = c_l$$
$$C_l vec(\mathrm{B}) = c_l$$
$$C_s vec(\mathrm{B}) = c_s$$

ここに $C_l := C_{\Xi\mathrm{B}}(I_3 \otimes \Xi)$ である。また $C_{\Xi\mathrm{B}}$ は $vec(\Xi\mathrm{B})$ から，C_s は $vec(\mathrm{B})$ から制約を課したい要素を選び出す選択行列である。そして c_l, c_s は選択された要素に与える制約値のベクトル（ゼロ制約の場合はゼロベクトル）である。また任意の $K \times K$ の対称行列 A に対して

$$\mathrm{vec}(\mathrm{A}) = D_K \mathrm{vech}(\mathrm{A})$$

を成立させるような行列を D_K とする。このような行列を Duplication 行列という。例えば $K = 3$ のとき

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$K = 4$ のとき

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる[3)]。また

$$D_K^+ = (D'_K D_K)^{-1} D'_K$$

と置く。以上の記号を使って次の定理を述べる。

定理５　（Lütkepohl（2005），Proposition 9.4: Local Identification of SVECM, p. 370）

（4）式及び（5）式の表現形式を持つ SVECM を考える。SVECM の構造パラメータ係数行列 B に関する左の３つの制約式が局所的に一意的な解を持つための必用十分条件は

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2D_K^+\left(\mathrm{B}\otimes I_K\right) \\ C_l \\ C_s \end{bmatrix} = n^2 \tag{7}$$

となることである。

例 4　King et al.（1991）の 3 変数 SVECM における長期及び短期制約を用いた識別性

King et al.（1991）は，アメリカの実質産出高（対数値：gnp_t），実質消費（対数値：c_t），実質投資（対数値：inv_t）から成る三変数 VAR モデルを使って，大部分の Real business Cycle Model が前提する「生産性ショックは長期的にこれら 3 変数に共通のトレンドをもたらす」という仮定を実証的に示した画期的な論文である。以下ではこれら 3 変数のベクトルを $y_t = \left(gnp_t, c_t, inv_t\right)'$ とする。この変数の並びに対応する三つの外生的ショックのベクトルを $w_t = \left(w_{1t}, w_{2t}, w_{3t}\right)'$ とする。w_{1t} は 3 変数全てに対して長期的影響力を持つ生産性ショックを，w_{2t} と w_{3t} は短期的影響しか持たないショックを表わす。またこれら 3 変数は何れも $I(1)$ 変数であり，二つの共和分関係，$c_t - gnp_t \sim I(0)$，$inv_t - gnp_t \sim I(0)$ が成り立つことが事前に実証的に確認されている。

これらの仮定の下でこのモデルは Granger の表現定理によって（5）式の形に表される。このモデルにおいて w_{1t} は長期的な効果を持つという仮定は，長期インパクト係数 Υ に次のようなゼロ制約を課すことと同値である。

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここに $*$ は制約のない数であることを示す。長期的特性に関してはこれ以上の制約は必要ない。しかしこの制約からは，w_{2t}, w_{3t} は短期的影響しか持たないという事しか分からない。この二つを識別するにはさらに制約が必要である。前に見たように

$$u_t = B_0^{-1} w_t$$

であるから，w_{2t} と w_{3t} を識別するために，この二つの短期制約にかかわりのある B_0^{-1} の最後の 2 列のどこか一か所にゼロ制約を置けば十分である。例えば

$$B_0^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

とする。この制約は，w_{2t} は全ての変数に即時的効果を持つことを，そして w_{3t} は実質消費に対しては即時効果を持たないことを意味する。これによって w_{2t} と w_{3t} の効果の違いが示されたので，この二つは識別できることになる。しかしこの制約が経済学的に正しいかどうかは別問題である。その点は分析者の経済理論に委ねられることになる。事実このモデルにおいては，B_0^{-1} に課される制約の正当性を判断することは困難である。そのため King et al. は生産性ショックがすべての変数に共通に長期トレンドをもたらすかどうかという点のみに分析を集中させ，B_0^{-1} に対する制約の正当性に関しては言及していない。

次に，上に挙げた Υ と B_0^{-1} に課された制約は，定理 5 の条件を満たしているかどうかをチェックしよう。そのために条件式に現れる各項を求める。以下の計算においては $\mathrm{B} = B_0^{-1}$ と Ξ の数値が必要であるが，ここでは Pfaff（2008）の“vars”を使って推定される値，

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.0103 & -0.0045 \\ -0.0060 & 0.0043 & 0.0000 \\ 0.0026 & 0.0196 & 0.0100 \end{bmatrix}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -0.245 & 1.094 & -0.113 \\ -0.264 & 1.179 & -0.121 \\ -0.241 & 1.073 & -0.110 \end{bmatrix}$$

を利用する。これらの値を使って $C_{\Xi B}vec(\Xi B)=c_l$ により定義される選択行列 $C_{\Xi B}$ を求めれば

$$C_{\Xi B}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

が得られる。また先に示した D_3 から $D_3^+=\left(D_3'D_3\right)^{-1}D_3'$ を計算できるので，$2D_3^+\left(B\otimes I_3\right)$ が求まる。次に上で求めた $C_{\Xi B}$ を使って $C_l:=C_{\Xi B}\left(I_3\otimes\Xi\right)$ を求めれば

$$C_l=\begin{bmatrix}0_{3\times3}&\Xi&0_{3\times3}\\0_{3\times3}&0_{3\times3}&\Xi\end{bmatrix}$$

となることが分かる。ここに $0_{3\times3}$ は 3×3 のゼロ行列である。最後に選択行列 C_s を求める。これは B 行列の 2 行 3 列の要素を選ぶ選択行列（ただし $C_svec(B)=c_s=0$ の形での選択行列）であるから

$$C_s=\left(0,0,0,0,0,1,0,0,0\right)$$

である。以上を定理の式に代入して階数を求めると

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}2D_K^+\left(B\otimes I_K\right)\\C_l\\C_s\end{bmatrix}=9\left(=n^2\right)$$

となる。従って定理5よりこのモデルは局所的に識別可能である。

例5　**Breitung et al.**（2004）におけるカナダの4変数 **VAR** モデル

Breitung et al.（2004，4.7.3節，p. 188～196）は4変数 SVAR モデルを用いてカナダの労働市場を分析した。そこで用いられた4変数とは，労働生産性“prod”（GDP と雇用者数の対数階差），雇用者数“e”（対数値），失業率“U”，実質賃金“rw”である。またこのモデル（システム）の外部から与えられるショックとして技術進歩ショック ε_t^{gdp}，労働需要ショック ε_t^d，労働供給ショック ε_t^s，賃金ショック ε_t^w を考え，これらのショックをベクトル

$$\varepsilon_t=\left(\varepsilon_t^{gdp}\quad\varepsilon_t^d\quad\varepsilon_t^s\quad\varepsilon_t^w\right)'$$

であらわした。ここで Breitung et al. は労働市場に関する経済理論と識別性のための制約数に関する理論から，以下のような制約を課した。

$$B=\begin{bmatrix}*&*&*&*\\*&*&*&*\\*&*&*&*\\*&0&*&*\end{bmatrix},\quad \Xi B=\begin{bmatrix}*&0&0&0\\*&*&*&0\\*&*&*&0\\*&*&*&0\end{bmatrix}$$

これらの制約は経済学的には以下のように解釈される。まず長期制約行列 ΞB の第4列に課せられたゼロ制約は，賃金ショック ε_t^w は全ての変数に対して長期的効果を持たないことを，また1行2～4列のゼロ制約は，“constant returns to scale”の仮定の下では gdp に長期的ショックを与えるのは，技術進歩ショック ε_t^{gdp} のみであることを示している。短期係数行列 B の（4,2）要素がゼロという制約は，労働需要ショック ε_t^d は実質賃金：“rw”に影響を与えないことを示している。ここで制約の個数の数え方に注意しなければならない。単にゼロ列に含まれるゼロの個数を数えるのだけでは十分でない。いま共和分階数を r とすれば，Υ の階数は $n-r$ である。この時，ΞB に含まれるゼロ列の個数は r であるが，そこに含まれるゼロの個数が制約の数を表すのではなく，$\left(n-r\right)r$ が制約の個数である。その理由は注4）に示す。

Pfaff（2008）は，このモデルを例として使いながら R package“vars”の使用法を説明している。その中で得られた推定結果は以下のとおりである。

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0.5840 & 0.0743 & -0.1526 & 0.069 \\ -0.1203 & 0.2614 & -0.1551 & 0.0898 \\ 0.0253 & -0.2672 & 0.0055 & 0.0498 \\ 0.1117 & 0 & 0.48377 & 0.4879 \end{bmatrix},$$

$$\Xi=\begin{bmatrix} 0.7910 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2024 & 0.5769 & -0.4923 & 0 \\ -0.1592 & -0.3409 & 0.1408 & 0 \\ -0.1535 & 1.4526 & -0.2495 & 0 \end{bmatrix}$$

これらの推定値を使って，定理の条件式を計算するために必要な $2D_4^+\left(\mathrm{B}\otimes I_4\right)$，$C_l$，$C_s$ が容易に計算される。以上の結果を条件式に代入すると

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 2D_K^+\left(\mathrm{B}\otimes I_K\right) \\ C_l \\ C_s \end{bmatrix}=16\,(=n^2)$$

となることが確認され，したがってこのモデルは，局所的に識別可能であることが判定された。この計算過程には，サイズの大きい行列が現れるが，それらをここに表示することは紙面の制約上難しいので，代わりに文末の注5）に計算に使った R コードを掲載しておく。

以上において，誤差項は正規分布に従うという仮定の下で SVAR モデルの識別問題を論じた。ところが最近の研究によれば，SVAR モデルに機械学習の分野における独立成分分析（Independent Component Analyis: ICA）を応用することによって，正規分布の仮定の下では識別不能なモデルが，非正規分布の下では識別可能になる場合があることが示されている。筆者は最近この方向の研究に興味を持っているので，本稿後編（Ⅱ）では非正規分布の下での SVAR の識別性と推定についての最近の研究を展望し，非正規構造 VAR の実証分析への応用可能性及び有効性について考察したい。

注

1） 前川（2017）は非正規 SVAR モデルを用いてわが国の非伝統的金融政策の効果分析を行った。

2） “SVAR モデルが正確に識別”とは“構造パラメータ B が正確に識別”と同義である。

3） R の行列計算パッケージ“matrixcalc”における関数 duplication.matrix( ) を使って求めることができる。

4） 次のような 4 変数 SVAR モデルを例としてこの問題を考えてみる。いま 4 変数のベクトルを $y_t=\left(y_{1t},y_{2t},y_{3t},y_{4t}\right)'$ で表し，y_{1t} と y_{2t} は I(1) 変数，y_{3t} と y_{4t} は I(0) 変数であることが分かっているとしよう。また対応する外生的構造ショックのベクトルを $w_t=\left(w_{1t},w_{2t},w_{3t},w_{4t}\right)'$ とする。また Granger の長期インパクト行列を

$$\Upsilon=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

とする。そして経済理論的に w_{3t} と w_{4t} は y_t に対して長期的効果を持たないことが分っているとする。従ってこの経済理論から Υ の階数は 2 となり，独立な列の数は 2 である。このランク落ちによって最後の 2 列は第 1 列と第 2 列の線形結合が 0 になるように制約を課すことができる（ここで二つの独立な線形制約が使われた）。このとき長期インパクト乗数行列は

$$\Upsilon=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と書ける。ここで Granger の表現定理の長期効果の項だけに着目すれば

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \\ y_{4t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \\ w_{3t} \\ w_{4t} \end{bmatrix}+\cdots$$

となる。上で y_{3t} と y_{4t} は I(0) 変数であったので，このことからさらに二つの独立な線形制約

$$c_{31}w_{1t}+c_{32}w_{2t}=0,\ c_{41}w_{1t}+c_{42}w_{2t}=0$$

が追加される。従って独立な線形制約の数は 4 個 $(=(n-r)r)$ が課されることになる。この例から分るように制約の個数を単純にゼロの個数を数えるだけではなく，$(n-r)r$ としなければならないのである。

5） R-code 定理 5 (7)式の評価プログラム

```
# Evaluation of eq.(7) in Theorem 5
# 行列 B，Xi（=Ξ），は Pfaff( ) に示されている R コー
```

```
# ドを使って計算した値を用い，また C_XiB (=C_ΞB)
# は定義に基づいて手計算した結果を用いた。
library(matrixcalc)
B <- matrix(c(
  0.5840, 0.0743, -0.1526, 0.0690,
 -0.1203, 0.2614, -0.1551, 0.0898,
  0.0253, -0.2672, 0.0055, 0.0498,
  0.1117,  0.0000,  0.4838, 0.4879),4,4)           # B 行列
Xi <- matrix(c(
  1.1710, -0.9513, -0.6050,  0.0712,
  0.7293,  1.4526, -0.5347, -0.3158,
 -0.3911, -0.3679,  0.8070,  0.0406,
  0.0467,  1.1725, -1.0707, -0.1130),4,4)           # Ξ 行列
 ###duplication matrix
 D4 <- duplication.matrix(4)
 print(D4)
 DD4<- solve(t(D4)%*%D4)%*%t(D4)                    # D_K^+ 行列
 W <- DD4%*%(B%x%diag(4))                    # D_K^+(B⊗I_K) 行列
 C_XiB <- matrix(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                   0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                   0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,
                   0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                   0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,
                   0,0,0,0,0,1 ),6,16)                # C_ΞB 行列
 Cl <- C_XiB%*%(diag(4)%x% Xi)                       # Cl 行列
 print (Cl)
 Cs <- matrix(0,1,16)
 Cs[8] <- 1
 print(Cs)                                           # Cs 行列
 R <- rbind(W,Cl,Cs)                                 # eq.(5)
 qr(R)$rank                              # rank of (5): =16 (=K^2)
```

参　考　文　献

Blamchard, O. J., and D. Oauh (1989): "The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances," *American Economic Review*, 79, 654–673.

Breitung, J., Brüggemann, R., and Lütkepohl, H. (2004): Structural Autoregressive Modeling and Impulse Responses, in H. Lütkepohl and M. Kratzig (eds), Aplied Time Series Econometrics, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 159–196.

Gourieroux, C., A. Monfort, and J. Renne (2107): "Statistical inference for independent component analysis: Application to structural VAR models," *Journal of Econometrics*, 196, 111–126.

Kilian, L. and H. Lütkepohl (2017): Structural Vector Autoregressive Analysis, Cambridge University Press.

King, R. G., C. I. Plosser, J. H. Stock, and M. W. Watson (1991): "Stochastic trends and economic fluctuations," American Economic Review, 81, 819–840.

Lanne, L., M. Meitz, and P. Saikkonen (2017): "Identification and estimation of non-Gaussian structural vector autoregressions," 196, 288–304, *Journal of Economics*, 196, 288–304.

Leeper, E. M., Sims, C. A., and Zha, T. (1996): "Monetary Policy Interventions", *Journal of Monetary Economics,* 50(8), 1673–1700.

Lütkepohl, H. (2005): New Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer, Belin.

Lütkepohl, H. (2008): "Problems related over-identifying restrictions for structural vector error correction models," *Economic Letters*, 99, 512–515.

Magnus, J. R., and Heinz Neudecker (1999): Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, Revised Edition, John Wiley & Sons.

Pfaff, B. (2008): "VAR, SVAR and SVEC Models: Implementation within R Packages vars," *Journal of Statistical Software*, 27(4). URL http://www.jstatsoft.org/v27/i04/.

Rothenberg, T. J. (1971): "Identification in Parametric Models", *Econometrica*, 39(3), 577–591.

Rubio-Remírez, J. F., Waggoner, D. F., and Zha, T. (2010): "*Structural Vector Aautoregressions: Theory of Identification and Algorithms for Inference*," Review of Economic Studies 77, 665–696.

Seber, G. F. (2008): A Matrix Handbook for Statisticians, John Wiley & Sons.

Shimizu, Hoyer, Hyvarinen, Kerminen (2006): "A linear non-Gaussian acyclic model for causal discovery," Journal of Machine Learning Research, Vol. 7.

Sims, C. A. (1980): "Macroeconomics and reality," *Econometrica*, 48, 1–48.

前川功一（2017）：非ガウス型構造 VAR モデルによる因果序列の探索―日本の量的金融緩和政策の分析を事例として―，広島経済大学創立五十周年記念論文集上巻，25–62.