

Heterogeneous Autoregressive モデル*

——サーバイと日経225株価指数の実現ボラティリティへの応用——

渡 部 敏 明**

概 要

近年、資産価格のボラティリティの推定量として、日中の高頻度データから計算される実現ボラティリティ (Realized Volatility; RV) を用いることが多い。RV の変動を表すモデルに Heterogeneous Autoregressive (HAR) モデルがあり、このモデルは日次 RV の変動を過去の日次、週次、月次といった周期の異なる RV の関数として表す。RV は長期記憶性を持つ可能性が指摘されており、HAR モデルは長期記憶モデルではないが、少ないパラメータで長期記憶過程をうまく近似できるのでボラティリティの予測精度が高いこと、パラメータを最小2乗法で簡単に推定できること、週次や月次のボラティリティを予測したい時には被説明変数を週次や月次の RV に置き換えるだけで良いことから、よく用いられる。その後、このモデルは様々な拡張が行われているので、本稿ではまず HAR モデルの発展についてサーバイする。次に、日経225株価指数の RV に応用し、これまでに行われている様々な拡張によって、ボラティリティの予測精度が改善するかどうか分析する。その結果、日次ボラティリティの予測では、ボラティリティ変動の非対称性を加える以外の拡張はボラティリティの予測精度を改善しないことが明らかになった。また月次ボラティリティの予測では、ボラティリティ変動の非対称性を考慮しても予測精度が改善しないことが明らかになった。

1. は じ め に

資産価格のボラティリティはリターンの分散もしくは標準偏差を表し、投資のリスク管理において重要な変数である。計量ファイナンスの分野では、リターンだけでなくボラティリティも時間を通じて確率的に変動しているという考えが主流になり、Engle (1982) の Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH) モデルを皮切りに、それを改良したモデルや Stochastic Volatility (SV) モデルなど、ボラティリティ変動の定式化が行われてきた。これらのモデルでは、まずボラティリティの変動を定式化し、そのモデルのパラメータを推定することでボラティリティの推定値が得られる。そこで、モデルが異なるとボラティリティの推定値も異なる。これに対して、近年ではボラティリティ

* 本稿は『広島経済大学経済研究論集』前川功一教授退任記念号への寄稿論文である。前川先生は長年大学で研究・教育に従事され、大変お疲れ様でした。同じ分野の研究者として、また同じ広島大学附属高校の卒業生として、これまで大変お世話になりましたこと、感謝申し上げます。本研究は科学研究費基盤研究 (A)「新たなマクロ計量モデルの構築と大規模データを用いた経済予測への応用」(17H00985)、「高次元データモデリングの新展開と統計的リスク分析」(19H00588)、および一橋大学社会科学高等研究院から助成を受けている。本研究で使用した RV 等のデータは、日経 NEEDS 株価指数先物・オプションティックデータから明治学院大学の生方雅人教授に作成してもらった。生方教授と法政大学の高橋慎准教授から本稿に対して貴重なコメントをもらった。また、一橋大学経済統計ワークショップの参加者からも貴重なコメントをもらった。ここに記して感謝の意を表したい。なお、本稿の誤りはすべて筆者の責任である。

** 一橋大学経済研究所長・教授

を推定する場合、日中の高頻度データから計算される実現ボラティリティ (Realized Volatility; RV) を用いることが多い。最も単純な日次 RV は日中リターンの2乗を一日分合計したものである。これはモデルに依存しないが、将来のボラティリティの予測、Value-at-Risk や期待ショートフォールなど分布の裾のリスク指標の導出、オプション価格の導出等を行う場合には、RV の変動を表すモデルが必要になる。RV は自己相関係数の減衰が遅く、長期記憶性を持つ可能性が指摘されており、そのため長期記憶モデルである Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average (ARFIMA) モデルが用いられることが多かった¹⁾。

しかし、近年最もよく用いられるのは、Corsi (2009) によって提案された Heterogeneous Autoregressive (HAR) モデルである。このモデルは日次 RV を過去の日次、週次、月次といった周期の異なる RV の関数として表す。HAR モデルは長期記憶モデルではないが、少ないパラメータで長期記憶過程をうまく近似できるのでボラティリティの予測精度が高いこと²⁾、パラメータを最小2乗法で簡単に推定できること、週次や月次のボラティリティを予測したい時には被説明変数を週次や月次の RV に置き換えるだけで良いことから、よく用いられる。その後、このモデルには様々な拡張が行われている。例えば、株式市場では株価が下がった日の翌日の方がよりボラティリティが上昇する傾向があることが知られており、そうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮したモデルに拡張されている。また、資産価格にジャンプがある場合には、RV はジャンプも含んでしまう。そこで、RV を連続成分 (Continuous Component) とジャンプ成分 (Jump Component) に分ける方法がいくつか提案されている。Andersen et al. (2007) は、日次、週次、月次 RV をそれぞれ連続成分とジャンプ成分に分け、それらを

別々に説明変数に加えた HAR-CJ モデルを提案している。HAR-CJ モデルにボラティリティ変動の非対称性を加えたモデルもある。HAR モデルのパラメータを可変にするという試みも行われており、本稿では特に Bollerslev et al. (2016) によって提案された HARQ モデルを取り上げる。

本稿では、それらのモデルについてサーベイを行うと共に、日経225株価指数の RV に応用し、HAR モデルの拡張によってボラティリティの予測精度が改善するかどうか分析した。その結果、日次ボラティリティの予測では、ボラティリティ変動の非対称性を考慮するとボラティリティの予測精度は高まるが、RV を連続成分とジャンプ成分に分けて説明変数にしても予測精度は上がらないことが明らかになった。また月次ボラティリティの予測では、ボラティリティ変動の非対称性を考慮しても予測精度が改善しないことが明らかになった。Bollerslev et al. (2016) は、HAR モデルの係数が実現 Quarticity (Realized Quarticity; RQ) の減少関数となることを理論・実証両方で示しており、彼らの HARQ モデルにボラティリティ変動の非対称性を加えた非対称 HARQ モデルを推定した結果、日経225株価指数の RV でも HAR モデルの係数と RQ の関係が負で有意になることが明らかになった。しかし、非対称 HARQ モデルによるボラティリティの予測精度は単純な HAR モデルより悪いことが明らかになった。

本稿の構成は以下の通りである。続く第2節で RV について説明する。第3節では Corsi (2009) によって提案された HAR モデルについて説明した後、それを拡張した非対称 HAR、HAR-CJ、非対称 HAR-CJ、非対称 HARQ モデルについて説明する。第4節では日経225株価指数の高頻度データとそれを用いた RV の計算方法について説明する。第5節では第3節で説明したすべてのモデルを日経225株価指数の RV や

その連続成分とジャンプ成分を用いて推定する。第6節では各モデルのボラティリティの予測精度を比較する。最後の第7節で結論を述べる。

2. 実現ボラティリティ

資産価格の対数値 $p(t)$ が拡散過程

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \quad (1)$$

に従っているとする。ここで、 $\mu(t)$ はドリフト、 $\sigma^2(t)$ は瞬時的ボラティリティ、 $W(t)$ はウィナー過程である。ファイナンス理論では $\sigma(t)$ を瞬時的ボラティリティと呼ぶが、ここでは $\sigma^2(t)$ を瞬時的ボラティリティと呼ぶことにする。また、オプション価格を導出するための Black and Scholes (1973) モデルでは $\mu(t)$ 、 $\sigma(t)$ を一定と仮定するが、ここでは時間を通じて変化して良いものとする。

このとき、 $t-1$ を第 $t-1$ 日の最終時点、 t を第 t 日の最終時点とすると、その間の第 t 日の真のボラティリティは次のように定義される。

$$IV_t = \int_{t-1}^t \sigma^2(s)ds. \quad (2)$$

これは瞬時的ボラティリティ $\sigma^2(s)$ を $t-1$ 時点から t 時点まで積分したものなので、積分ボラティリティ (Integrated Volatility; IV) と呼ばれる。

最も単純な第 t 日の RV は、 $t-1$ 時点から t 時点までの日中リターン

$$\{r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n}, \dots, r_t\}$$

を使って次のように計算される。

$$RV_t = \sum_{i=1}^n r_{t-1+i/n}^2 \quad (3)$$

ここで、資産価格にノイズが無ければ、 $n \rightarrow \infty$ とすると、 RV_t は IV_t に確率収束する。

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} RV_t = IV_t \quad (4)$$

そこで、 n を大きくすればするほど (日中リ

ターンの時間間隔を短くすればするほど)、RV は IV のより精度の高い推定値になる。

しかし、資産価格にはマイクロストラクチャー・ノイズと呼ばれるノイズが加わり³⁾、 n を大きくすればするほど、価格の変動に占めるマイクロストラクチャー・ノイズによる変動の割合が大きくなるので、 n を大きくし過ぎると、RV はマイクロストラクチャー・ノイズによる変動ばかり捉えてしまう。RV からマイクロストラクチャー・ノイズによるバイアスを除去する方法がいくつか提案されているが⁴⁾、Liu et al. (2015) がそうした方法を用いても5分ごとのリターンの2乗和として計算した単純なRVにボラティリティのサンプル内でのフィットや予測精度で勝てないとの結果を様々な資産について示している。そこで、本稿でもRVを5分ごとのリターンの2乗和として計算した。

3. Heterogeneous Autoregressive モデルとその発展

3.1 Heterogeneous Autoregressive モデル

RV の変動を表すのに最も良く用いられるのは、Corsi (2009) の提案した HAR モデルである。 RV_t を第 t 日の日次 RV とすると、HAR モデルは以下の式で表される。

$$RV_t = \alpha + \beta_d RV_{t-1} + \beta_w RV_{t-5:t-1} + \beta_m RV_{t-22:t-1} + \epsilon_t. \quad (5)$$

ここで、

$$RV_{t-5:t-1} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 RV_{t-i}, \quad RV_{t-22:t-1} = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} RV_{t-i}$$

であり、それぞれ過去の週次、月次 RV を表す。このモデルは日次 RV の AR (22) モデルの係数に制約を課して3つの係数 ($\beta_d, \beta_w, \beta_m$) で表していることに他ならない。

このモデルでは RV_t の非負性が保証されないで、以下のようにRVの対数値を定式化しているものも少なくない。

$$\ln RV_t = \alpha + \beta_d \ln RV_{t-1} + \beta_w \ln RV_{t-5t-1} + \beta_m \ln RV_{t-22t-1} + \epsilon_t. \quad (6)$$

その場合、 $\ln RV_{t-5t-1}$ 、 $\ln RV_{t-22t-1}$ には以下の2種類の定義がある。

定義1：

$$\ln RV_{t-5t-1} = \ln \left(\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 RV_{t-i} \right),$$

$$\ln RV_{t-22t-1} = \ln \left(\frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} RV_{t-i} \right).$$

定義2：

$$\ln RV_{t-5t-1} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \ln RV_{t-i},$$

$$\ln RV_{t-22t-1} = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} \ln RV_{t-i}.$$

どちらの定義も一長一短ある。定義1だと、 $\exp(\ln RV_{t-5t-1})$ 、 $\exp(\ln RV_{t-22t-1})$ がそれぞれ週次、月次ボラティリティになるが、(6)式は非線形なモデルになる。定義2だと、(6)式は $\ln RV_t$ のAR(22)モデルの係数に制約を課して3つの係数で表したものになるが、 $\exp(\ln RV_{t-5t-1})$ 、 $\exp(\ln RV_{t-22t-1})$ が週次、月次ボラティリティにならない。対数を取らない(5)式で週次や月次のボラティリティを予測したい時には、被説明変数を $RV_{t:t+4}$ 、 $RV_{t:t+21}$ にすれば良い。対数を取った(6)式では、定義1を用いると、週次ボラティリティの予測値は、被説明変数を $\ln RV_{t:t+4}$ とし、誤差項 ϵ_t が平均0、分散 σ_w^2 の正規分布に従うと仮定すると、残差分散 $\hat{\sigma}_w^2$ を用いて以下のように計算できる。

$$E_t[RV_{t+1:t+5}] = \exp \left[E_t[\ln RV_{t+1:t+5}] + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_w^2 \right]. \quad (7)$$

月次ボラティリティの予測値も同様に計算できる。それに対して、定義2を用いた場合は、このように簡単には計算できない。そこで、本稿では定義1を用いる。

また、Andersen et al. (2007)、Corsi et al. (2008)では以下の定式化も行っているが、本稿ではこれは用いない。

$$\sqrt{RV_t} = \alpha + \beta_d \sqrt{RV_{t-1}} + \beta_w \sqrt{RV_{t-5t-1}} + \beta_m \sqrt{RV_{t-22t-1}} + \epsilon_t. \quad (8)$$

RVの変動を表すモデルにはARFIMAモデルやHARモデルの他にUnobserved Components(UC)モデルがある。これについては、Barndorff-Nielsen and Shephard (2001, 2002)、Barndorff-Nielsen et al. (2004)、Nagakura and Watanabe (2015)を参照されたい。

3.2 非対称HARモデル

株式市場では価格が下がった日の翌日の方がボラティリティが上昇する傾向があることが知られており、こうしたボラティリティ変動の非対称性を考慮した非対称HARモデルを用いているものもある。例えば、Ubukata and Watanabe (2014b)では以下のモデルを用いている⁵⁾。

$$RV_t = \alpha + \beta_d RV_{t-1} + \beta_w RV_{t-5t-1} + \beta_m RV_{t-22t-1} + (\delta_0 + \delta_1 D_t^-) |R_{t-1}| + \epsilon_t, \quad (9)$$

$$\ln RV_t = \alpha + \beta_d \ln RV_{t-1} + \beta_w \ln RV_{t-5t-1} + \beta_m \ln RV_{t-22t-1} + (\delta_0 + \delta_1 D_t^-) |R_{t-1}| + \epsilon_t. \quad (10)$$

ここで、 R_{t-1} は第 $t-1$ 日の日次リターンで、 D_t^- は以下のように定義されるダミー変数である。

$$D_t^- = \begin{cases} 1 & R_{t-1} < 0 \\ 0 & R_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

このモデルでは、 $\delta_1 > 0$ であれば価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることになる。

これに対して、Bekaert and Hoerova (2014)はより簡単な以下のモデルを用いている。

$$RV_t = \alpha + \beta_d RV_{t-1} + \beta_w RV_{t-5:t-1} + \beta_m RV_{t-22:t-1} + \delta R_{t-1}^- + \epsilon_t, \quad (11)$$

$$\ln RV_t = \alpha + \beta_d \ln RV_{t-1} + \beta_w \ln RV_{t-5:t-1} + \beta_m \ln RV_{t-22:t-1} + \delta R_{t-1}^- + \epsilon_t. \quad (12)$$

ここで、 $R_{t-1}^- = \min[R_{t-1}, 0]$ 。このモデルでは、 $\delta < 0$ であれば価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇する傾向があることになる。

(9), (10) 式で $\delta_0 = 0$ とすると、それぞれ (11), (12) 式になる。以下の実証分析では (9), (10) 式も用いたが、 δ_0 は有意ではなく、予測精度も (11), (12) 式を用いた場合と変わらなかったため、(11), (12) 式を用いた場合の結果だけ報告する。

3.3 HAR-CJ モデル

資産価格の対数値 $p(t)$ が拡散過程 (1) 式ではなく、以下のジャンプ拡散過程に従っているとする。

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + \kappa(t)dN(t). \quad (13)$$

ここで、 $\kappa(t)$ はジャンプの大きさ、 $N(t)$ は数え上げ測度 (Counting Measure) である。

このとき、価格にノイズが無ければ、RV は IV ではなく、以下のように IV にジャンプを加えたものに収束する。

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} RV_t = \int_{t-1}^t \sigma^2(s)ds + \sum_{t-1 < s \leq t} \kappa^2(s)ds. \quad (14)$$

ここで、右辺の第 1 項と第 2 項はそれぞれ連続成分 (Continuous Component)、ジャンプ成分 (Jump Component) と呼ばれ、以下、それらの推定値をそれぞれ C_t , J_t と表す。

連続成分はジャンプ成分よりも持続性が高いので、Andersen et al. (2007) は HAR モデルの説明変数を RV_{t-1} , $RV_{t-5:t-1}$, $RV_{t-22:t-1}$ ではなく、 C_{t-1} , $C_{t-5:t-1}$, $C_{t-22:t-1}$, J_{t-1} , $J_{t-5:t-1}$, $J_{t-22:t-1}$ にした以下の HAR-CJ モデルを提案している。

$$RV_t = \alpha + \beta_d C_{t-1} + \beta_w C_{t-5:t-1} + \beta_m C_{t-22:t-1} + \gamma_d J_{t-1} + \gamma_w J_{t-5:t-1} + \gamma_m J_{t-22:t-1} + \epsilon_t, \quad (15)$$

$$\ln RV_t = \alpha + \beta_d \ln C_{t-1} + \beta_w \ln C_{t-5:t-1} + \beta_m \ln C_{t-22:t-1} + \gamma_d \ln(1 + J_{t-1}) + \gamma_w \ln(1 + J_{t-5:t-1}) + \gamma_m \ln(1 + J_{t-22:t-1}) + \epsilon_t. \quad (16)$$

ここで、

$$C_{t-5:t-1} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 C_{t-i}, \quad C_{t-22:t-1} = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} C_{t-i}, \\ J_{t-5:t-1} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 J_{t-i}, \quad J_{t-22:t-1} = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} J_{t-i}.$$

Barndorff-Nielsen and Shephard (2004, 2006), Andersen et al. (2012), Corsi et al. (2010) 等が RV を C と J に分割する方法を提案している。本稿では、Barndorff-Nielsen and Shephard (2004, 2006) の方法を用いる。Barndorff-Nielsen and Shephard (2004, 2006) は、価格にノイズが無い場合、以下の Bipower Variation (BV) が連続成分に収束することを示している。

$$BV_t = \mu_1^{-2} \frac{n}{n-1} \sum_{i=2}^n |r_{t-1+i/n} - r_{t-1+(i-1)/n}|. \quad (17)$$

ここで、 $\mu_1 = \sqrt{2/\pi}$ 。

通常、この BV_t をそのまま C_t として用いるのではなく、 $RV_t - BV_t$ を用いてジャンプの検定を行い、統計的に有意であれば $J_t = RV_t - BV_t$ 、有意でなければ $J_t = 0$ とする。その上で、 $C_t = RV_t - J_t$ とする。ジャンプの検定にはいくつかの方法が提案されているが、本稿では、Barndorff-Nielsen and Shephard (2006), Huang and Tauchen (2005) の検定を用いる。この検定では以下の統計量を用いる。

$$Z_t^* = \frac{\sqrt{n}(RV_t - BV_t)RV_t^{-1}}{\sqrt{(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5)\text{Max}(1, \text{TQ}_t BV_t^{-2})}}. \quad (18)$$

ここで,

$$TQ_t = n\mu_{4/3}^{-3} \frac{n}{n-4} \sum_{i=3}^n |r_{t-1+i/n}|^{4/3} |r_{t-1+(i-1)/n}|^{4/3} |r_{t-1+(i-2)/n}|^{4/3}, \quad (19)$$

$$\mu_{4/3} = 2^{2/3} \Gamma(7/6) \Gamma(1/2)^{-1}.$$

TQ_t は Tri-power Quarticity と呼ばれる積分 4 次モーメント (Integrated Quarticity; IQ)

$$IQ_t = \int_{t-1}^t \sigma^4(s) ds. \quad (20)$$

の推定量である。 Z_t^* はジャンプがないという帰無仮説の下で漸近的に標準正規分布に従う。以下では、有意水準を 1 % として検定を行った。

3.4 非対称 HAR-CJ モデル

本稿の以下の実証分析では、非対称 HAR モデルと HAR-CJ モデルを合わせた以下の非対称 HAR-CJ モデルも用いる。

$$\begin{aligned} RV_t = & \alpha + \beta_d C_{t-1} + \beta_w C_{t-5:t-1} + \beta_m C_{t-22:t-1} \\ & + \gamma_d J_{t-1} + \gamma_w J_{t-5:t-1} + \gamma_m J_{t-22:t-1} \\ & + \delta R_{t-1}^- + \epsilon_t, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \ln RV_t = & \alpha + \beta_d \ln C_{t-1} + \beta_w \ln C_{t-5:t-1} \\ & + \beta_m \ln C_{t-22:t-1} + \gamma_d \ln(1 + J_{t-1}) \\ & + \gamma_w \ln(1 + J_{t-5:t-1}) + \gamma_m \ln(1 + J_{t-22:t-1}) \\ & + \delta R_{t-1}^- + \epsilon_t. \end{aligned} \quad (22)$$

ボラティリティ変動の非対称性に関して (9), (10) 式と同様の定式化も行ったが、やはり δ_0 は有意ではなく、予測精度も (21), (22) 式を用いた場合と変わらなかったため、以下では (21), (22) 式を用いた場合の結果だけ報告する。

3.5 非対称 HARQ モデル

HAR モデルの係数を可変にする試みも行われている。そうした試みの中で、本稿では Bollerslev et al (2016) の HARQ モデルを取り上げる。Bardorff-Nielsen and Shephard (2002)

は、価格にマイクロストラクチャー・ノイズやジャンプが無い場合の RV_t の漸近分布を以下のように導出している。

$$RV_t = IV_t + \eta_t, \eta_t \sim MN(0, 2\Delta IQ_t). \quad (23)$$

ここで、 η_t は RV_t を有限個の日中リターンから計算することに伴う離散化誤差で、 Δ は RV の計算に用いる日中リターンの時間間隔、 $MN(0, 2\Delta IQ_t)$ は平均 0、分散 $2\Delta IQ_t$ の混合正規分布 (Mixture Normal Distribution) を表す。さらに、簡単化のため、 IV_t は AR(1) モデル

$$IV_t = \phi_0 + \phi_1 IV_{t-1} + u_t \quad (24)$$

に従うと仮定すると、(23) 式と (24) 式より、 RV_t と RV_{t-1} の共分散 $\text{Cov}(RV_t, RV_{t-1})$ と RV_t の分散 $\text{Var}(RV_t)$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \text{Cov}(RV_t, RV_{t-1}) &= \phi_1 \text{Var}(IV_t), \\ \text{Var}(RV_t) &= \text{Var}(IV_t) + 2\Delta IQ_t. \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、以下の回帰を考える。

$$RV_t = \beta_0 + \beta_1 RV_{t-1} + v_t. \quad (26)$$

そうすると、

$$\beta_1 = \frac{\text{Cov}(RV_t, RV_{t-1})}{\text{Var}(RV_t)} = \phi_1 \left(1 + 2 \frac{\Delta IQ_t}{\text{Var}(IV_t)} \right)^{-1} \quad (27)$$

となるので、 β_1 は IQ_t の減少関数となることわかる。

この結果に基づき、Bollerslev et al. (2016) は以下の HARQ モデルを提案した。

$$\begin{aligned} RV_t = & \alpha + \left(\beta_d + \beta_{dq} \sqrt{RQ_{t-1}} \right) RV_{t-1} \\ & + \beta_w RV_{t-5:t-1} + \beta_m RV_{t-22:t-1} + \epsilon_t. \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、 RQ_{t-1} は資産価格の日中の高頻度データに基づく IQ_{t-1} の推定量であり、以下の実証分析では (19) 式に従って Tri-power Quarticity として計算した。

Bollerslev et al. (2016) はボラティリティ変動の非対称性を考慮していないが、考慮した方が当てはまりが良くなるので、以下の実証分析では非対称 HARQ モデル

$$\begin{aligned} RV_t = & \alpha + \left(\beta_d + \beta_{dq} \sqrt{RQ_{t-1}} \right) RV_{t-1} \\ & + \beta_w RV_{t-5,t-1} + \beta_m RV_{t-22,t-1} + \delta R_{t-1}^- + \epsilon_t. \end{aligned} \quad (29)$$

を用いる。また、Bollerslev et al. (2016) では、 β_w や β_m も $RQ_{t-5,t-1}$ 、 $RQ_{t-22,t-1}$ に依存するモデルや HAR-CJ モデルを同様に拡張したモデルも用いているが、それらのモデルを用いても当てはまりは良くならなかったため、そうしたモデルの結果は省略する。

これ以外の HAR モデルの係数を可変にしているモデルには、平滑推移 (smooth transition) モデルを用いた McAleer and Medeiros (2008)、変化点 (Change-point) モデルを用いた Liu and Maheu (2008)、ノンパラメトリックに推定している Chen et al. (2018) 等がある。また、Corsi et al. (2008) は HAR モデルの誤差項の分散を GARCH モデルによって可変にしたモデルを用いている。近年注目されている分散リスクプレミアムはボラティリティの変動に対するリスクプレミアムなので、ボラティリティの誤差分散の変動を考えることは重要である。分散リスクプレミアムについては、Bekaert and Hoerova (2014)、Bollerslev et al. (2009)、Bollerslev et al. (2014)、Ubukata and Watanabe (2014b) 等を参照されたい。

4. データ

RV の計算のため、日経 NEEDS ティックデータから 1996/3/11 - 2019/9/30 の日経 225 株価指数の 9 : 00, 9 : 05, ..., 11 : 00 (2011/11/21 から 11 : 30), 12 : 30, 12 : 35, ..., 15 : 00 の価格を抽出し、それらの対数階差 (%) として 5 分ごとのリターンを計算した。ただし、15 : 00

から翌日の 9 : 00 までの夜間のリターンと 11 : 30 から 12 : 30 までの昼休みのリターンは時間間隔が長いので無視し、市場が開いている間の 5 分ごとのリターンの 2 乗を足し合わせることで RV を計算した。夜間と昼休みを無視しているため、終値から終値までの 24 時間のボラティリティではないことに注意されたい。24 時間のボラティリティに直す方法については、Hansen and Lunde (2005a, b) を参照されたい。前節で説明した方法によって、RV を C と J に分割した。

図 1 にこのようにして計算した日次 RV、C、J を図示している。ジャンプ成分 J は小さく、RV と連続成分 C はほぼ同じ値になっている。ここでは第 3.3 節で説明した方法でジャンプの検定の有意水準を 1 % として RV を C と J に分割したが、有意水準を 5 % としてもほとんど差がなかった。また、Andersen et al. (2012) の方法を用いてもあまり差はなかった。表 1 に日次 RV、C、J の基本統計量をまとめている。JB は分布の正規性を検定するための Jarque and Bera (1987) 統計量、LB(10) は 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung and Box (1978) 統計量で、Diebold (1988) の方法で分散不均一性を調整している。RV と C の基本統計量の値はほぼ同じであり、それらに比べて J は平均、標準偏差、最大値がすべて小さい⁶⁾。また、RV、C 共に正規性は棄却され、自己相関も有意である。表 2 には RV の対数値の基本統計量も計算している。正規性は棄却されるが、歪度は 0 に、尖度は 3 に近づいており、JB 統計量の値も小さくなっている。このことから、対数を取った方が分布が正規分布に近づくことがわかる。それに対して、LB(10) 統計量は対数を取った方が大きくなっており、自己相関が高まることがわかる。図 2 は日次 RV とその対数値の自己相関係数を示している。いずれも自己相関係数は

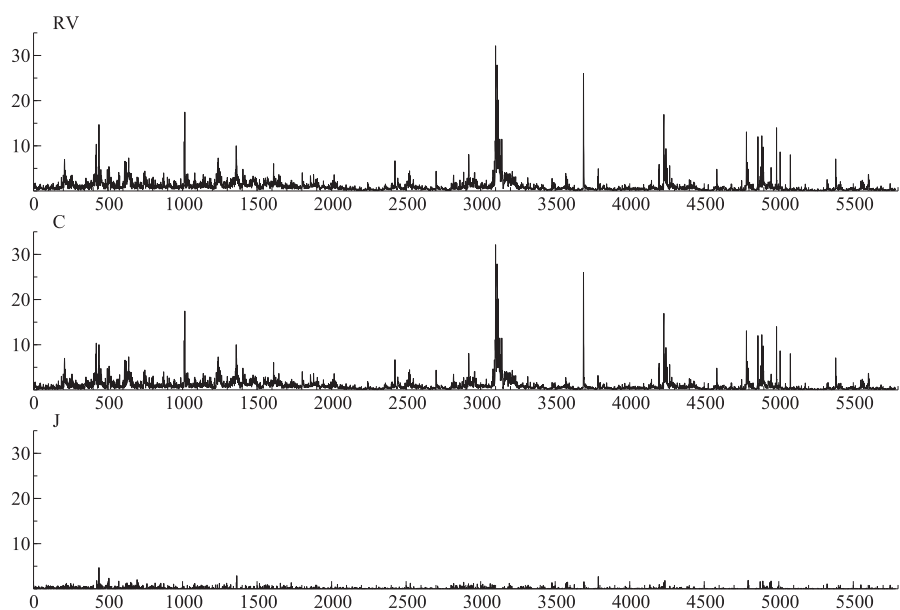


図1 日経225株価指数の日次 RV, C, J

表1 日経225株価指数の日次 RV, C, J の基本統計量

	平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	JB	LB(10)
RV	1.038	1.509	32.128	0.036	8.040	107.691	2,703,257.7	518.8
C	0.973	1.489	32.128	0.025	8.350	114.072	3,039,895.3	478.1
J	0.065	0.207	4.686	0.000	6.256	74.923	1,284,172.1	133.7
ln RV	-0.412	0.913	3.470	-3.321	0.165	3.231	38.9	13,173.9

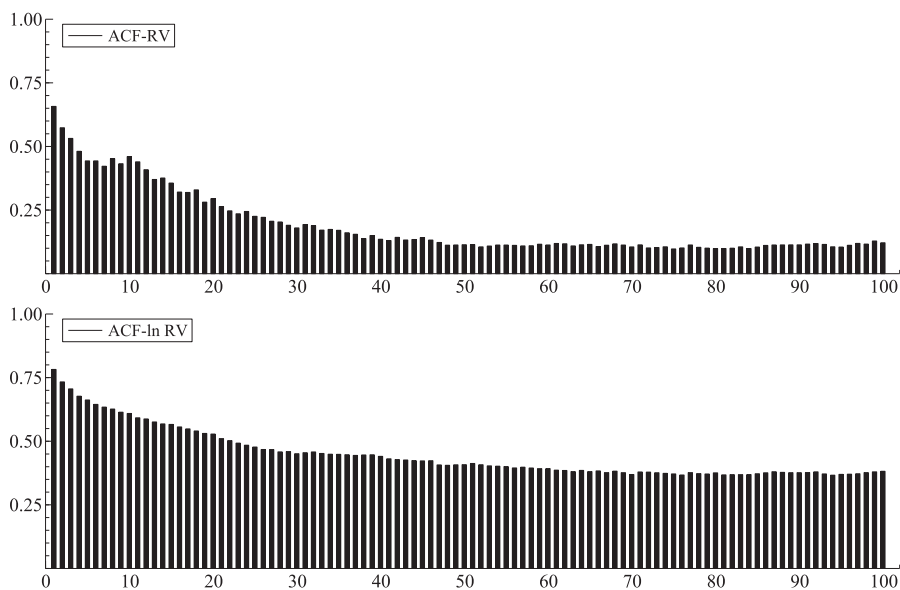


図2 日経225株価指数の日次 RV とその対数値の自己相関係数

減衰が遅く、長期記憶性を持つ可能性が窺える。対数を取った方が自己相関の減衰が遅く、これは表 1 で対数を取った方が LB (10) 統計量の値が高いことと整合的である。

5. 推 定 結 果

本節では、第 3 節で説明したモデルを第 4 節

で説明したデータを用いて推定する。推定に用いたデータの期間は 1996/3/11 – 2019/9/30 である。この期間のサンプル数は 5,783 であるが、説明変数の月次 RV が $RV_{1,22}$ から始まるため、被説明変数は RV_{23} から始まり、そのため推定に用いたサンプル数は 5,761 である。

表 2 に各モデルの推定結果を示している。 t

表 2 各モデルの推定結果
(a) 対数変換しないモデル

	α	β_d	β_w	β_m	γ_d	γ_w	γ_m	δ	β_{dq}
HAR									
推定値	0.124	0.378	0.282	0.221					
t 値	2.778	5.708	3.343	3.746					
非対称 HAR									
推定値	0.056	0.297	0.315	0.217				-0.228	
t 値	1.077	4.868	3.927	3.795				-4.961	
HAR-CJ									
推定値	0.117	0.384	0.285	0.209	0.137	0.045	0.853		
t 値	3.474	5.799	3.355	3.430	0.936	0.208	2.451		
非対称 HAR-CJ									
推定値	0.050	0.303	0.320	0.204	0.080	0.001	0.880	-0.228	
t 値	1.250	4.950	3.951	3.468	0.641	0.005	2.616	-4.950	
HARQ									
推定値	0.011	0.400	0.313	0.179				-0.224	-0.005
t 値	0.222	5.282	3.882	2.735				-4.908	-2.734

(b) 対数変換したモデル

	α	β_d	β_w	β_m	γ_d	γ_w	γ_m	δ
HAR								
推定値	-0.092	0.362	0.352	0.218				
t 値	-11.602	17.527	11.669	9.579				
非対称 HAR								
推定値	-0.164	0.298	0.373	0.230				-0.103
t 値	-17.241	14.926	12.492	10.527				-11.217
HAR-CJ								
推定値	-0.103	0.348	0.342	0.196	0.233	0.168	0.731	
t 値	-7.529	17.215	11.581	8.643	3.808	1.485	4.570	
非対称 HAR-CJ								
推定値	-0.180	0.286	0.361	0.206	0.186	0.170	0.805	-0.106
t 値	-12.736	14.764	12.424	9.498	3.223	1.539	5.278	-11.553

表3 各モデルの自由度修正済み決定係数

	HAR	非対称 HAR	HAR-CJ	非対称 HAR-CJ	非対称 HARQ
対数変換しないモデル	0.489	0.506	0.491	0.507	0.510
対数変換したモデル	0.673	0.682	0.670	0.680	—

値は Newey and West (1987) の標準誤差を使って計算した。(a) の対数変換しないモデルでは、HAR モデルと非対称 HAR モデルの過去の日次、週次、月次 RV の係数である β_d , β_w , β_m の推定値はすべて有意水準 1 % で統計的に有意な正の値になっている。また、非対称 HAR モデル、非対称 HAR-CJ モデル、非対称 HARQ モデルすべてでボラティリティ変動の非対称性を表す δ の推定値は有意水準 1 % で統計的に有意な負の値になっており、株式市場で観測される価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇するという現象と整合的である。HAR-CJ モデルと非対称 HAR-CJ モデルでは、連続成分 C は日次、週次、月次すべてで有意水準 1 % で統計的に有意な正の値になっているが、ジャンプ成分 J は日次と週次で有意水準 10 % でも有意でない。非対称 HARQ モデルの β_{dq} は有意水準 1 % で統計的に有意な負の値になっており、Bollerslev et al. (2016) の結果と整合的である。(b) の対数変換したモデルでもほぼ同様の結果が得られているが、HAR-CJ モデルと非対称 HAR-CJ モデルでは、ジャンプ成分が有意水準 10 % で有意でないのは週次のみである。

表3に各モデルの自由度修正済み決定係数を示している。対数変換しないモデルでは非対称 HARQ モデルが最も高く、次いで非対称 HAR-CJ, 非対称 HAR モデルの順になっている。HAR モデルと非対称 HAR モデル、HAR-CJ モデルと非対称 HAR-CJ モデルではどちらも後者の方が値が高くなっているのに対して、HAR モデルと HAR-CJ モデル、非対称 HAR モデルと非対称 HAR-CJ モデルの間にはほとんど差が

ない。対数変換したモデルでも HAR モデルと非対称 HAR モデル、HAR-CJ モデルと非対称 HAR-CJ モデルではどちらも後者の方が値が高くなっているが、HAR モデルと HAR-CJ モデル、非対称 HAR モデルと非対称 HAR-CJ モデルではどちらも後者の方が値が低くなっている。このことから、ボラティリティ変動の非対称性を考慮するとモデルのフィットが良くなるが、RV を連続成分とジャンプ成分に分けて説明変数に加えてもフィットは良くならないことがわかる。

6. ボラティリティの予測精度の比較

本節では各モデルのボラティリティの予測精度を比較する。ボラティリティの予測精度の比較で問題なのはボラティリティの真の値がわからないことである。そこで、真のボラティリティの代理変数が必要になる。古くは日次リターンの 2 乗を用いていたが⁷⁾、近年では RV を用いることが多い⁸⁾。また、Patton (2011) は代理変数が真のボラティリティの不偏推定量であれば、以下の損失関数は真のボラティリティを用いた場合と同じランキングになることを理論的に示している。

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} (\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 - \sigma_{t+1}^2)^2, \\ \text{QLIKE} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} \left(\ln \hat{\sigma}_{t+1|t}^2 + \frac{\sigma_{t+1}^2}{\hat{\sigma}_{t+1|t}^2} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 $\hat{\sigma}_{t+1|t}^2$ は第 t 日における第 $t+1$ 日のボラティリティの予測値を表し、 σ_{t+1}^2 には第 $t+1$ 日の真のボラティリティを用いるべきであるが、それはわからないので真のボラティリティの不

表4 QLIKE (日次ボラティリティの予測)

	HAR	非対称 HAR	HAR-CJ
対数変換しないモデル	0.508	0.505	0.508
対数変換したモデル	0.495	0.489	0.496
	非対称 HAR-CJ	非対称 HARQ	非対称 ARFIMA
対数変換しないモデル	0.505	0.550	—
対数変換したモデル	0.489	—	0.493

偏推定量である代理変数を用いる。ここでは、Barndorff-Nielsen et al. (2008, 2009) によって提案された実現カーネル (Realized Kernel; RK) を代理変数として用いた。RK はマイクロストラクチャー・ノイズによって生じる日中リターンの自己相関を考慮したボラティリティの推定量であり、マイクロストラクチャー・ノイズによるバイアスを軽減できる。また、極端な値があった場合は MSE よりも QLIKE の方が安定的なので、本稿では損失関数に QLIKE を用いた。各モデルをそれぞれ第 t 日までの 2,000 個のデータを用いてパラメータを推定し、 RV_{t+1} を予測した。対数を取ったモデルでは、誤差項 ϵ_t の分布を正規分布と仮定し、残差分散 $\hat{\sigma}^2$ を用いて、 RV_{t+1} の予測値を以下のように計算した。

$$E_t[RV_{t+1}] = \exp \left[E_t[\ln RV_{t+1}] + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \right]. \quad (31)$$

また、比較のため、以下の非対称 ARFIMA (0,d,1) モデルでも同様に予測値を計算した。

$$(1-L)^d (\ln RV_t - \mu_0 - \mu_1 R_{t-1}^-) = u_t - \theta u_{t-1}. \quad (32)$$

ここでは、 $0 < d < 1$, $|\theta| < 1$ と仮定し、Beran (1995) の近似推定法によってパラメータを推定した。詳しくは、渡部・佐々木 (2006)、渡部 (2007) を参照されたい。

各モデルの QLIKE の値を表 4 に示している。この結果から、ボラティリティの非対称性を考

慮するとボラティリティの予測精度が高まるが、RV を連続成分とジャンプ成分に分けて説明変数にしても予測精度は高まらないことがわかる。非対称 HARQ モデルは標本内の当てはまりは良かったが、ボラティリティの予測精度は悪い。また、対数変換したモデルはしないモデルより予測精度が高い。対数変換したモデルを非対称 ARFIMA モデルと比較すると、非対称性を考慮しない HAR, HAR-CJ モデルは非対称 ARFIMA モデルより予測精度が低い、非対称性を考慮した非対称 HAR, 非対称 HAR-CJ モデルは非対称 ARFIMA モデルより予測精度が高い。

以上は日次ボラティリティの予測であるが、HAR モデルでは被説明変数を週次、月次 RV もしくはそれらの対数値にすれば、週次、月次ボラティリティの予測も簡単に行える。そこで、(5), (11), (15), (21) 式の被説明変数を $RV_{t,t+21}$, (6), (12), (16), (22) 式の被説明変数を $\ln RV_{t,t+21}$ にした 8 つのモデルを用いて月次ボラティリティの予測を行った。表 5 に各モデルによる月次ボラティリティの予測値の QLIKE を示している。日次ボラティリティの予測と違い、ボラティリティ変動の非対称性を考慮しても予測精度は上がらない。RV を対数変換しないモデルでは、HAR-CJ, 非対称 HAR-CJ モデルの予測精度がそれぞれ HAR, 非対称 HAR モデルと比べて上がっているが、対数変換したモデルではそうっていない。この結果は、米国の S&P500 で月次ボラティリティの予測精度を比較した Bekaert and Hoerova (2014)

表5 QLIKE (月次ボラティリティの予測)

	HAR	非対称 HAR	HAR-CJ	非対称 HAR-CJ
対数変換しないモデル	0.614	0.616	0.604	0.608
対数変換したモデル	0.542	0.542	0.544	0.545

の結果と整合的で、そこでもボラティリティ変動の非対称性を考慮することで予測精度は上がっていない。これは、ボラティリティ変動の非対称性は短期的な現象で、価格が下落しても翌日もしくは数日間のボラティリティしか上昇せず、月次ボラティリティにはさほど影響がないためであると考えられる。

7. 結 論

本稿では RV の変動を表すモデルとして最も良く用いられる HAR モデルとその発展についてサーベイし、それらを日経225株価指数の RV に応用し、ボラティリティの予測精度の比較を行った。その結果、ボラティリティ変動の非対称性を加える以外の拡張は日次ボラティリティの予測精度を改善せず、月次ボラティリティの予測ではボラティリティ変動の非対称性を考慮しても予測精度が改善しないことが明らかになった。

注

- 1) 例えば, Andersen et al. (2001a, b, 2003), 渡部 (2007), 渡部・佐々木 (2006) 等を参照されたい。長期記憶過程や ARFIMA モデルについて詳しくは, Beran (1994), 矢島 (2003), 田中 (2006 第7章) 等を参照されたい。
- 2) 渡部 (2007) を参照されたい。
- 3) マイクロストラクチャー・ノイズについて詳しくは Campbell et al. (1997) を参照されたい。
- 4) Ubukata and Watanabe (2014a), Liu et al. (2015), 生方・渡部 (2011) を参照されたい。
- 5) 正確に言うと, Ubukata and Watanabe (2014b) は (10) 式だけを用いている。
- 6) Andersen et al. (2007) の Table 1A-C に, マルク/ドルレート, S&P500, 米国 T ボンドの日次 RV, C, J の基本統計量が計算されている。ただし, そこではジャンプの検定は行わず, $J_t = \text{Max}[RV_t - BV_t, 0]$ としている。それによると, J の平均を RV の平均で割った比率はそれぞれ 0.073,

0.144, 0.126 である。本稿で用いた日経225株価指数で同じくジャンプの検定を行わず, $J_t = \text{Max}[RV_t - BV_t, 0]$ として J の平均を RV の平均で割った比率を計算すると 0.133 なので, それは極端に小さいわけではない。

7) 渡部 (2000) を参照されたい。

8) Andersen and Bollerslev (1998), Hansen and Lunde (2006) を参照されたい。

参 考 文 献

- Andersen, T. G. and Bollerslev, T. (1998), "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts," *International Economic Review*, 39, 885–905.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T. and Diebold, F. X. (2007), "Roughing it up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling, and Forecasting of Return Volatility," *Review of Economics and Statistics*, 89, 701–720.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Ebens, H. (2001a), "The Distribution of Realized Stock Return Volatility," *Journal of Financial Economics*, 61, 43–76.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P. (2001b), "The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility," *Journal of the American Statistical Association*, 96, 42–55.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P. (2003), "Modeling and Forecasting Realized Volatility," *Econometrica*, 71, 579–625.
- Andersen, T. G., Dobrev, D. and Schaumburg, E. (2012), "Jump-robust Volatility Estimation Using Nearest Neighbor Truncation," *Journal of Econometrics*, 169, 75–93.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Nielsen, B., Shephard, N. and Ysusi, C. (2004), "Measuring and Forecasting Financial Variability Using Realized Variance," A. C. Harvey, S. J. Koopman and N. Shephard (eds.), *State Space and Unobserved Components Models: Theory and Applications*, Chapter 10, pp. 205–235, Cambridge University Press.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2001), "Non-Gaussian OU Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics (with discussion)," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 63, 167–241.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002), "Econometric Analysis of Realized Volatility and

- Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 64, 253–280.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004), "Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps (with discussion)," *Journal of Financial Econometrics*, 2, 1–37.
- Barndorff-Nielsen O. E. and Shephard, N. (2006), "Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation," *Journal of Financial Econometrics*, 4, 1–30.
- Barndorff-Nielsen, O. E., P. R. Hansen, A. Lunde and N. Shephard (2008) "Designing Realized Kernels to Measure the Ex-post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise," *Econometrica*, 76, 1481–1536.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2009), "Realized Kernels in Practice: Trades and Quotes," *Econometrics Journal*, 12, C1–C32.
- Bekaert, G. and Hoerova, M. (2014), "The VIX, the Variance Premium and Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, 183, 181–192.
- Beran, J. (1994), *Statistics for long-memory processes*, Chapman & Hall.
- Beran, J. (1995), "Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 57, 659–672.
- Black, F. and Scholes, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.
- Bollerslev, T., Marrone, J., Xu, L. and Zhou, H. (2014), "Stock Return Predictability and Variance Risk Premia: Statistical Inference and International Evidence," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 49, 633–611.
- Bollerslev, T., Patton, J. A. and Quaedvlieg, R. (2016), "Exploiting the Errors: A Simple Approach for Improved Volatility Forecasting," *Journal of Econometrics*, 192, 1–18.
- Bollerslev, T., Tauchen, G. and Zhou, H. (2009), "Expected Stock Returns and Variance Risk Premia," *Review of Financial Studies*, 22, 4463–4492.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W. and Mackinlay, A. C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press. (祝迫得夫・大橋和彦・中村信弘・本田俊毅・和田賢治訳 (2003) 『ファイナンスのための計量分析』共立出版.)
- Chen, X. B., Gao, J., Li, D. and Silvapulle, P. (2018), "Nonparametric Estimation and Forecasting for Time-Varying Coefficient Realized Volatility Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, 36, 108–110.
- Corsi, F. (2009) "A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility," *Journal of Financial Econometrics*, 7, 174–196.
- Corsi, F., Mittnik, S., Pigorsch, C. and Pigorsch, U. (2008), "The Volatility of Realized Volatility," *Econometric Reviews*, 27, 46–78.
- Corsi, F., Pirino, D. and Renò, R. (2010), "Threshold Bipower Variation and the Impact of Jumps on Volatility Forecasting," *Journal of Econometrics*, 159, 276–288.
- Diebold, F. X. (1988), *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, Springer-Verlag.
- Engle, R. F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, 987–1007.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005a), "A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH (1,1)?" *Journal of Applied Econometrics*, 20, 873–889.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005b), "A Realized Variance for the Whole Day Based on Intermittent High-frequency Data," *Journal of Financial Econometrics*, 3, 525–554.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2006), "Consistent Ranking of Volatility Models," *Journal of Econometrics*, 131, 97–121.
- Huang, X. and G. Tauchen (2005) "The Relative Contribution of Jumps to Total Price Variance," *Journal of Financial Econometrics*, 3, 456–499.
- Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1987), "Test for Normality of Observations and Regression Residuals," *International Statistical Review*, 55, 163–172.
- Liu, C. and Maheu, J. M. (2008), "Are There Structural Breaks in Realized Volatility?" *Journal of Financial Econometrics*, 6, 326–360.
- Liu, L. Y., Patton, A. J. and Sheppard, K. (2015), "Does Anything Beat 5-minute RV? A Comparison of Realized Measures across Multiple Asset Classes," *Journal of Econometrics*, 187, 293–311.
- Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978), "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models," *Biometrika*, 81, 27–40.
- McAleer, M. and Medeiros, M. C. (2008), "A Multiple Regime Smooth Transition Heterogeneous Autoregressive Model for Long Memory and Asymmetries," *Journal of Econometrics*, 147, 104–119.
- Nagakura, D. and Watanabe, T. (2015), "A State Space Approach to Estimating the Integrated Variance under the Existence of Market Microstructure Noise," *Journal of Financial Econometrics*, 13, 45–82.
- Newey, W. K. and West K. D. (1987), "A Simple Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix,"

- Econometrica*, 55, 703–708.
- Patton, J. A. (2011), “Volatility Forecast Comparison Using Imperfect Volatility Proxies,” *Journal of Econometrics*, 160, 246–256.
- Ubukata, M. and Watanabe, T. (2014a), “Option Pricing Using Realized Volatility and ARCH Type Models,” *Japanese Economic Review*, 65, 431–467.
- Ubukata, M. and Watanabe, T. (2014b), “Market Variance Risk Premiums in Japan for Asset Predictability,” *Empirical Economics*, 47, 169–198.
- 生方雅人・渡部敏明 (2011) 「実現ボラティリティーボラティリティの計測方法とリスクマネジメントへの応用可能性—」『証券アナリストジャーナル』 Vol. 49, No. 8, 16–25.
- 田中勝人 (2006) 『現代時系列分析』 岩波書店.
- 矢島美寛 (2003) 「長期記憶をもつ時系列モデル」刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓著『経済時系列の統計 その数理的基礎』第Ⅱ部, 103–202. 岩波書店.
- 渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』 朝倉書店.
- 渡部敏明 (2007) 「Realized Volatility：サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』第58巻第4号, 352–373.
- 渡部敏明・佐々木浩二 (2006) 「ARCH 型モデルと“Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」『金融研究』第25巻別冊第2号, 39–74.