広島経済大学経済研究論集
第40巻第4号　2018年3月
http://dx.doi.org/10.18996/keizai2018400403

曖昧な予想の下での混合戦略均衡の分析

堀　江　真由美*

概　要

本論文は，戦略形ゲームにおける混合戦略に対して曖昧さを導入したゲームを分析する。プレイヤーの選好関係を表現する効用表現には，Horie（2017）の「順序依存の落胆回避型効用表現」を新規に導入する。この効用表現は，基数性と曖昧さ回避傾向が生起確率に伴い変化するという点が特長である。これらの性質を用いて Goeree and Holt（2001）の実験結果と合致した均衡を導出し，自己利得効果（own-payoff effect）に理論的説明を与える。

1.　序

ゲーム理論におけるナッシュ均衡（Nash, 1950）は，様々なゲームにおける均衡分析の出発点として位置づけられる最も基本的な均衡概念である。近年の実験経済学や行動経済学の目まぐるしい発展に伴い，ゲーム的状況の行動分析が進み，理論予測としてのナッシュ均衡が実際の実験結果と相反する例が数多く報告されている。とはいえ，ナッシュ均衡はあらゆる有限ゲームに存在できる“弱い”均衡概念であるため，均衡分析研究の歴史は，均衡概念の精緻化とモデルの拡張による効率性の追究という2つの方向性が主流であった。

ナッシュ均衡の中で，最も頑強とされているのが強ナッシュ均衡であり，弱支配戦略を含むナッシュ均衡や混合戦略ナッシュ均衡には，戦略的あるいはインセンティブの面からみても，行動的（behavioral）な意味からみても，均衡の妥当性を揺るがすような再現性が極めて高い実験結果も多い。また，現実の世界では，実際のプレイヤーの行動は，限定合理性，利他的誘因，慣習，社会規範といった様々な要因に左右されることが多く，ゲーム・モデルを経済問題の縮図として当てはめることが適合しない場合も多い。しかしながら，ナッシュ均衡予測とは異なる実証結果への対応策としてゲーム理論の行動分析でよく用いられる手法は，プレイヤーの選好を行動的な選好関係に拡張することでゲームの構造を捉え直し，ナッシュ均衡集合を拡張しようという試みである。

本論文は，戦略形ゲームにおけるプレイヤーの選好を，相手プレイヤーの行動選択に主観的な曖昧さを感じるという選好関係に拡張する。具体的には，相手プレイヤーの混合戦略に対して曖昧さを導入し，各プレイヤーがこの曖昧さに対して「曖昧さ回避傾向（ambiguity aversion）」を呈する選好関係に拡張する。このような相手の混合戦略に対して曖昧さを導入したゲームの均衡概念の定義，均衡の存在などについては，Eichberger and Kelsey（2000），Azrieli, Yaron and Teper（2011），Riedel and Sass（2014）などによって検討・分析されている。

こうした曖昧さを伴う戦略の下でのゲーム分析を基盤として，本論文では，プレイヤーの選好関係を表現する効用表現に，Horie（2017）の

* 広島経済大学経済学部准教授

「順序依存の落胆回避（rank-dependent disappointment aversion; RDDA）型効用表現」を新規に導入する。前述の研究では，Gilboa and Schmeidler（1990）や Alon and Schmeidler（2014）のマックスミン型期待効用，Schmeidler（1989）のショケー期待効用を用いることが多い。こうした効用表現では，曖昧さ回避傾向は事象の起こりやすさとは関係なく一定であるという性質をもつ。しかし，実際の選択行動では，事象の起こりやすさの大きさに依存して曖昧さ回避傾向が変化する傾向が確認される（Burghart, Epper and Fehr, 2016）。RDDA 型効用表現は，こうした選択行動にも対応した説明能力をもつ効用表現である。さらに，この RDDA 型効用表現は，ゲームの混合戦略を分析する上で欠かせない「基数性」を備えているため，本研究で新規導入し，新たな分析方法として提案する。

本稿の後半では，Goeree and Holt（2001）によって確認されている「自己利得効果（own-payoff effect）」について，この RDDA 型効用表現を用いて説明する。RDDA 型効用の下では，期待効用やマックスミン型期待効用で評価した場合とは異なり，自己の利得が自己の混合戦略にも依存する形になる。このため，自己の利得が増加した行動に大きな確率を付与するという行動は，（自分だけでなく）相手プレイヤーの曖昧回避傾向を強める，あるいは予想集合を拡大させる効果を持ち，結果として互いに最適応答となり正当化される。この効果があるため，RDDA による均衡では，より現実的で説明力の高い分析結果が得られている。

以降，２のモデルでは，曖昧さを導入したゲームを定義し，プレイヤーの利得としてみたときに RDDA 型効用表現がどういう性質を持つかを明らかにし，均衡概念を提示する。３では，一意な混合戦略均衡における「自己利得効果」を解説し，ナッシュ均衡やその他の均衡ではどのように自己利得効果を説明できるかを検証する。そのうえで，RDDA 型効用表現を導入したときに均衡はどのようになるか，どの程度自己利得効果を説明できるかを明らかにする。最終章では，RDDA 型効用表現の説明能力と今後の可能性について議論する。

2.　モ　デ　ル

本論文では，次のような戦略形ゲーム $\Gamma = \left\{N, A, (U_i)_{i\in N}\right\}$ を考察する。有限プレイヤー集合を N，プレイヤー $i \in N$ の行動集合 A_i を有限集合とし，その直積集合を $A = \prod_{i\in N} A_i$ で表す。Δ_i を A_i 上のすべての確率分布の集合とし，プレイヤー $i \in N$ の混合戦略を $\sigma_i \in \Delta_i$ で表す。各プレイヤーの戦略の選択は全て独立に行われるものとする。

2.1　曖昧な予想

ゲーム Γ の各プレイヤーは，相手プレイヤーの行動選択に対して主観的に曖昧な予想を持つものとする。意思決定理論の設定でいえば，A は状態集合（set of states），非空な $S \subset A$ は事象，A の加法族 Σ は起こり得るすべての事象の集合族である。実際に Σ 上の測度を考える場合，各プレイヤー $i \in N$ は自分以外のプレイヤーの行動 A_{-i} 上に確率的な予想を持ち，この A_{-i} 上の予想と自分自身の混合戦略 $\sigma_i \in \Delta_i$ から，Σ 上に測度が定義される。ここでは，単純化のため $\mu_i : \Sigma \to [0,1]$ をプレイヤー i の予想と呼び，μ_i は非加法的測度（容量）であるとする[1)]。プレイヤー i の予想が μ_i であるときの利得 U_i は順序依存の落胆回避（rank-dependent disappointment aversion; RDDA）型効用

$$
\begin{aligned}
U_i(\sigma_i, \mu_i) &= \frac{\sum_{u_i(a)\geq v} \mu_i(a) u_i(a)}{1+\beta_i \sum_{u_i(a)<v} \mu_i(a)} \\
&\quad + \frac{(1+\beta_i)\sum_{u_i(a)<v} \mu_i(a) u_i(a)}{1+\beta_i \sum_{u_i(a)<v} \mu_i(a)} \\
&= v
\end{aligned}
\tag{1}
$$

で表現されるものとする。ここで $\beta_i \in (-1, \infty)$ を落胆回避測度，$u_i : X \to \mathbb{R}$ を結果上の効用関数とする。ただし，$u_i(a) \equiv U_i(a)$ である。この形式の効用表現は Horie（2017）で公理化されており，μ_i が優加法的[2] であればプレイヤー i は曖昧さ回避的であることが示されている。

ここでいう「落胆回避」とは，文字通り事後的に結果に落胆してしまう状況を事前に避けたいという選択行動パターンである。この RDDA 型効用は，Gul(1991）の落胆回避型（disappointment aversion, DA）効用の確率測度の部分を非加法的測度に拡張した形になっている。Gul の DA 効用の場合と同様に，行動の組合せがもたらす状態（ここではプレイの結果）を 2 つに分けて評価する。この効用関数で評価した確実等価結果（certainty equivalent outcome）よりも好ましい結果をもたらす事象，つまり「勝ち事象」と，確実等価結果よりも好ましくない結果をもたらす事象，つまり「負け事象」に分け，負け事象の確率評価には $1+\beta_i$ を掛けて評価する。「負け事象」の結果は確実等価結果よりも好ましくない結果，つまり落胆をもたらす結果であるので，落胆をもたらす「負け事象」を相対的に大きく評価することで，事前に落胆を回避する（嫌う）傾向を表現しており，$\beta_i > 0$ に対応する。

この RDDA 型効用表現は，Schmeidler(1989）の順序依存型期待効用（ショケー期待効用）を拡張したシンプルな形式でありながら，基数性をもち柔軟な効用表現である。

柔軟な効用表現　相手の行動予測に曖昧さを導入したモデルで最も頻繁に用いられる効用形が Gilboa and Schmeidler(1989）のマックスミン型期待効用である。(1）式で μ が凸[3] で $\beta = 0$ のとき，マックスミン型期待効用形式で表現することができる。しかし，Machina(2014）は，マックスミン型期待効用をはじめとした効用表現で表される選好関係は限定的であり，現実の意思決定者の選択行動は更に複雑で多様であることを指摘している。期待効用形式，マックスミン型期待効用やショケー期待効用では，曖昧さ回避傾向は，事象の起こりやすさとは関係なく一定である性質をもつが，実際の選択行動では，生起確率の低い（ゼロに近い）事象では曖昧さ回避傾向が弱まり，生起確率の高い（1 に近い）事象では曖昧さ回避傾向が強まることが確認される。Machina(2014）はこの性質を「主観的共通比率効果」と呼び，これは，Khanemann and Tversky(1979）の実験で名高い「共通比率効果」を曖昧な事象に拡張した概念でもある。RDDA 型効用表現は，こうした主観的共通比率効果を伴う選択行動にも対応した，柔軟な効用表現である。また，本稿の目的である混合戦略均衡における行動分析において欠かせない要素でもある。曖昧さ回避傾向が対象とする事象の生起確率に伴い強弱するという性質は，プレイヤーの混合戦略の中で，より高い（あるいは低い）確率を付与する行動（事象）で曖昧さ回避傾向が強まる（あるいは弱まる）ということを意味する。

基数性　RDDA 型効用表現は，先に述べた曖昧さの下での「共通比率効果」を説明できるだけでなく，「基数性（cardinality)」という重要な性質を持つ。効用関数 V が基数的であるとは，V が選択肢上の選好関係 $\succcurlyeq$ を表現するならば，任意の実数 $a > 0$，b について $aV + b$ もまた選択肢上の選好関係 $\succcurlyeq$ を表現することをいう。U_i が基数的であれば，プレイヤー i にとって無差別な（同じ効用値を与える）混合戦略 σ_i と σ_i' の凸結合もまた無差別である（同じ効用値を与える）という，混合戦略均衡を正当化するうえで重要な性質となる。もし仮にこの性質が満たされないとすると，曖昧さ回避傾向の下では，純戦略よりも混合戦略の方を強く好むこ

ととなり，強ナッシュ均衡が消滅するなど，この性質自体が均衡分析を複雑にする。曖昧さの下での混合における凸性・凹性の問題は複雑であり，Lo（1996）等で詳細に検討されている。本稿で扱うゲームの範囲では，こうした問題は直接的には生じないものの，RDDA 型効用表現の下での均衡概念は，このような研究に準じたものである。

本研究の目的は，純戦略ナッシュ均衡を含めた均衡概念の再構築ではなく，一意な混合戦略均衡の分析であり，そのためには基数的で主観的共通比率効果を説明できる効用形式が重要な意味を持つため，RDDA 型効用表現を採用している。

ここで RDDA 型効用表現の性質を詳しくみるために，次のような特殊なケースを解説する。

勝ち事象 S の結果を y，負け事象 S^c の結果を z，$u_i(y)>u_i(z)$ とすると，（1）は

$$U_i(\sigma_i,\mu_i)=\frac{\mu_i(S)}{1+\beta_i(1-\mu_i(S))}u_i(y)+\frac{(1+\beta_i)(1-\mu_i(S))}{1+\beta_i(1-\mu_i(S))}u_i(z) \qquad (2)$$

となる。このように2結果 y，z しか生起せず事象が2つに分けられる場合は，biseparable utility（Ghirardato and Marinacci, 2001）の形になる。ここで $\varphi:[0,1]\times(-1,\infty)\to[0,1]$ で（2）式を書き換えると

$$U_i(\sigma_i,\mu_i)=\varphi(\mu_i(S);\beta_i)u_i(y)+\left[1-\varphi(\mu_i(S);\beta_i)\right]u_i(z)$$

と書くことができる。次の命題は，この φ についての性質を明らかにするものである。

命題1　μ を優加法的な非加法的測度とし，$0<\mu(S)<1$ なる事象 S が少なくともひとつ存在するものとする。

（i）任意の μ，β を所与とするとき $\varphi(\mu(\cdot);\beta)$ は Σ 上の非加法的測度である。

（ii）任意の μ，$\beta>0$ を所与とするとき $\varphi(\mu(\cdot);\beta)$ は優加法的である。

証明.（i）任意の β を所与としたとき $\varphi(0;\beta)=0$ かつ $\varphi(1;\beta)=1$ であることは明らかである。また $\varphi(\cdot;\beta)$ は強い増加関数であるから，$S\subset T$ ならば $\mu(S)\le\mu(T)$ より $\varphi(\mu(S);\beta)\le\varphi(\mu(T);\beta)$ である。したがって $\varphi(\mu(\cdot);\beta)$ は Σ 上の非加法的測度である。

（ii）$\beta>0$ を所与とすると，$\varphi(\cdot;\beta)$ は凸関数であるから，$S\cap T=\emptyset$ なる $S,T\in\Sigma$ について $\mu(S)+\mu(T)\le\mu(S\cup T)$ より $\varphi(\mu(S);\beta)+\varphi(\mu(T);\beta)\le\varphi(\mu(S\cup T);\beta)$ である。したがって $\varphi(\mu(\cdot);\beta)$ は優加法的である。■

勝ち事象と負け事象が互いに補完的であるとき，$\beta>0$ ならば $\varphi(\mu(\cdot);\beta)$ は優加法的である。また，μ が $\mu(S)+\mu(S^c)<1$ であれば，ある $\beta_*<0$ が存在して，任意の $\beta\in(\beta_*,0)$ について $\varphi(\mu(\cdot);\beta)$ は優加法的となる。強い落胆回避（$\beta>0$）であることは，φ が優加法的であるための十分条件であるものの，μ が加法的ではない，つまり強く曖昧回避的であれば，十分に大きい $\beta<0$ の下では φ は優加法的である。

ここで φ が優加法的となるような μ，β の組に対して，予想集合を $P_i\subset\Delta_j$ とし，

$$\min_{p(S)\in P}p(S)=q_*,\qquad \max_{p(S)\in P}p(S)=q^*$$

とおくと，命題1から（2）式は

$$\begin{aligned}U_i(\sigma_i,\mu_i)&=\min_{p(S)\in P}\left[\frac{p(S)}{1+\beta_i(1-p(S))}u_i(y)+\frac{(1+\beta_i)(1-p(S))}{1+\beta_i(1-p(S))}u_i(z)\right]\\&=\frac{q_*}{1+\beta_i(1-q_*)}u_i(y)+\frac{(1+\beta_i)(1-q_*)}{1+\beta_i(1-q_*)}u_i(z)\end{aligned}$$

と書き換えられる。つまり，φ が優加法的とな

るような μ, β の組の下では，（2）式はマックスミン型効用の形で表すことができる。以下では，この性質を用いて，２×２戦略形ゲームの均衡を分析する。

2.2　2×2 戦略形ゲームにおける予想集合とペイオフ

任意の２×２戦略形ゲームにおいては，$|A|=4$ で，各プレイヤーは自分自身の混合戦略を知っているため，状態空間は単純な分割になる。実際には，（1）式の確実等価結果が４結果の選好順序のどの位置にランクされるかによって U_i の値が異なり，４結果と確実等価結果の選好順位によって U_i の値が決まる陰関数の形で与えられる。以降で詳しく検証するのは，図１のような２×２の利得構造であり，本節ではこの例に即して（1）式の効用関数の形状を具体的に解説する。

	Left	Right
Top	x	40
Bottom	40	80

図１　行プレイヤーの利得構造

図１の２×２戦略形ゲームでは，$N=\{1,2\}$，$A_1=\{T,B\}$，$A_2=\{L,R\}$ で，行動集合 A は４つの行動の組合せから成るので，状態の数自体は４となるが，自分自身の混合戦略には曖昧さはなく，相手に対する予想と自分自身の混合戦略は独立に決まるとしているので，曖昧さを伴う事象は L と R である。

プレイヤー１（行プレイヤー）は，プレイヤー２（列プレイヤー）の混合戦略に対して，曖昧さを伴う予想を持つ。これは，効用表現（1）よりそれぞれ非加法的測度 μ_1,μ_2 で表される。

プレイヤー１の予想集合を $P_1\subset\Delta_2$ で表し，$P_1=[q_*,q^*]$ と書く。プレイヤー２の場合も同様にして予想集合を $P_2\subset\Delta_1$ で表し，$P_2=[p_*,p^*]$ とする。ただし，このとき，

$$\mu_1(TL\,|\,T)=\mu_1(BL\,|\,B)=q_*,$$
$$\mu_1(TR\,|\,T)=\mu_1(BR\,|\,B)=q^*$$

である。μ_1 は優加法的であることから，μ_1 を用いても q_* を用いても同値である。

まず，$x=80$ とする。このとき U_1 は必ず40と80の間の値になるので，４結果のうち，勝ち事象は $\{TL,BR\}$，負け事象は $\{TR,BL\}$ になる。プレイヤー１の予想集合が P_1 で，T を p の確率で選ぶとき，（1）式は

$$U_1(p,P_1)=\frac{80\big[pq_*+(1-p)(1-q^*)\big]}{1+\beta(p(1-q_*)+(1-p)q^*)}+\frac{40(1+\beta)\big[(p(1-q_*)+(1-p)q^*\big]}{1+\beta(p(1-q_*)+(1-p)q^*)}$$

となる。$x=320$ とすると，U_1 の値が80と320の間にあるか40と80の間にあるかで，勝ち事象と負け事象が異なる。（後の参考のため）仮に40と80の間にあるとすると，勝ち事象，負け事象は上述の場合（$x=80$）と等しい。この場合

$$U_1(p,P_1)=\frac{320\,pq_*+80(1-p)(1-q^*)}{1+\beta(p(1-q_*)+(1-p)q^*)}+\frac{40(1+\beta)\big[p(1-q_*)+(1-p)q^*\big]}{1+\beta(p(1-q_*)+(1-p)q^*)}$$

である。$x=44$ とし，U_1 が40と80の間にあるとすると，勝ち事象は BR のみで負け事象は $\{TL,TR,BL\}$ となり

$$U_1(p,P_1)=\frac{44(1+\beta)pq_*+80(1-p)(1-q^*)}{1+\beta(1-(1-p)(1-q^*))}+\frac{40(1+\beta)\big[(p(1-q_*)+(1-p)q^*\big]}{1+\beta(1-(1-p)(1-q^*))}\quad(3)$$

となる。

2.3 主観的均衡

堀江（2016）では，U_i にマックスミン期待効用を用いて，2×2戦略形ゲームの主観的均衡を定義した。本稿も主観的均衡を均衡概念として用いる。RDDA型期待効用表現は μ，β で与えられるが，命題1の結果から，β が一定の範囲の値であれば，マックスミン期待効用の拡張形として用いることができる。

2×2戦略形ゲーム $\Gamma=\{N,A,(U_i)_{i\in N}\}$ の均衡を，ナッシュ均衡を拡張した形で，次のように定義する。

定義1 $\sigma^*=(\sigma_1^*,\sigma_2^*)$ が2×2戦略形ゲーム $\Gamma=\{N,A,(U_i)_{i\in N}\}$ の主観的均衡であるとは，プレイヤー i，$i,j=1,2$，$j\neq i$ の戦略 σ_i^* と P_i が

$$\sigma_i^*\in\arg\max_{\sigma_i\in\Delta_i}\min_{q\in P_i}U_i(\sigma_i,P_i),$$

かつ $\sigma_j^*\in P_i$ であるときをいう。

3. 混合戦略ナッシュ均衡と自己利得効果

3.1 3種類のマッチング・ペニーズ

マッチング・ペニーズは定和ゲームで，一意なナッシュ均衡が混合戦略均衡となるゲームである。じゃんけん等と同様に，必勝法はなく，各プレイヤーが等確率で行動を選ぶのが均衡となる。

図2の3種類のマッチング・ペニーズは，Goeree and Holt（2001）の実験に用いられた例である。以下では，この例に即して考察を進める。

3種類のマッチング・ペニーズには，対称（Symmetry），非対称（Asymmetry），逆の非対称（Reversed asymmetry）があり，行プレイヤーが T（Top），列プレイヤーが L（Left）を選んだときの，行プレイヤーの利得値のみが，対称では80，非対称では320，逆の非対称では44と異なる値に変えられている。列プレイヤーの利得は全て同じである。対称のマッチング・ペニーが伝統的なマッチング・ペニーズのゲームになっており，このゲームは所謂「定和ゲーム」で，純戦略均衡は存在せず，両プレイヤー共に等確率で各行動を選択するという，一意な混合戦略均衡のみがナッシュ均衡である。この場合の混合戦略均衡を $(p_0^S,q_0^S)=(0.5,0.5)$[4)]と記すこととする。つまり，対称なマッチング・ペニーズゲームでは，相手プレイヤーが等確率で各行動を選択する限り，自分も等確率で各行動を選択することが最適応答になっているということを意味する。

	Left (48)	Right (52)
Top (48)	80, 40	40, 80
Bottom (52)	40, 80	80, 40

対 称 (Symmetry)

	Left (16)	Right (84)
Top (96)	320, 40	40, 80
Bottom (4)	40, 80	80, 40

非対称 (Asymmetry)

	Left (80)	Right (20)
Top (8)	44, 40	40, 80
Bottom (92)	40, 80	80, 40

逆の非対称 (Reversed asymmetry)

図2 3種類のマッチング・ペニーズ

利得表の各行動の横に示している括弧内の数値は，Goeree and Holt（2001）で検証された実験結果を表している。実際のプレイでは $\left(\frac{48}{100},\frac{48}{100}\right)$ の割合で T，L が選ばれており，これはほぼナッシュ均衡予測と合致していると考えてよい。

次に，非対称のマッチング・ペニーズでは，(T,L) に対応する行プレイヤーの利得のみが80ではなく320と4倍に増加している。この場合，実際のプレイでは $\left(\frac{96}{100},\frac{16}{100}\right)$ の割合で T，L が選ばれており，T を選ぶ行プレイヤーが著しく

表 1　期待効用，落胆回避型期待効用とマックスミン期待効用を用いた均衡比較

	NE		DANE		Ellsberg E		Obs.	
	R	C	R	C	R	C	R	C
sym	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.48	0.48
asym	0.5	0.125	0.96^{*}	0.16	[0.5, 1]	[0.125, 0.5]	0.96	0.16
rev	0.5	10/11	$0.08^{\dagger}$	0.8	[0, 0.5]	[0.5, 10/11]	0.08	0.8

$^{*}\beta_1 = 0.532$, $^{\dagger}\beta_1 = 5$.

増加していることを示している。これは，行プレイヤーが，増加した自己の利得に対応する行動を選ぶ傾向が強まることを意味する。しかし，このゲームのナッシュ均衡は，(0.5, 0.125) である。混合戦略ナッシュ均衡の性質からすると，プレイヤーの均衡混合戦略は，相手プレイヤーがそれぞれの純戦略から得られる期待利得を等しくするように選ぶのが最適であり，これは相手プレイヤーの利得のみから定まるため，自己の利得の大きさには依存しないはずである。この例では，行プレイヤーの利得が80から320に変化しても，列プレイヤーの利得は変わらないため，行プレイヤーの均衡戦略0.5は変わらず，列プレイヤーが利得の変化に応じて0.5から0.125に均衡戦略を変化させる。これがナッシュ均衡による行動予測である。

逆に，行プレイヤーの利得が80から44に減少した場合はどのような結果が得られただろうか。この場合のナッシュ均衡は $\left(0.5, \frac{10}{11}\right)$ だが，実験結果は $\left(\frac{8}{100}, \frac{80}{100}\right)$ であった。非対称の場合とは逆に，減少した自己の利得をもたらす行動に，より小さな確率を割り振ることを示している。

このように，自己の利得の大小に対応して，ナッシュ均衡予測では変化しないはずの均衡混合戦略が大小してしまう行動は「自己利得効果（own-payoff effect）」として知られている。これは，様々な実験研究で報告されている再現性の高い現象である。実際のナッシュ均衡プレイからは大きく乖離しているため，Goeree and Holt（2001）は10の“anomality”のひとつとして指摘している。

では，この自己利得効果を均衡行動として説明するには，どのような方法があるだろうか。実際にナッシュ均衡を拡張する方法には様々な手法があるが，本稿では，ゲームのプリミティヴであるプレイヤーの選好表現（効用関数）に用いられている「期待効用」に着目し，これを拡張する方法を検証する。

表 1 は，各プレイヤーの効用表現に，期待効用を用いた時のナッシュ均衡（NE），DA 型期待効用を用いた時のナッシュ均衡（DANE），マックスミン期待効用を用いた時のエルスバーグ均衡（Riedel and Sass, 2014）を示している。前述の通り，ナッシュ均衡は対称では (0.5, 0.5)，非対称では (0.5, 0.125)，逆非対称では $\left(0.5, \frac{10}{11}\right)$ である。

2 列目の DANE では，行プレイヤーが落胆回避型期待効用，列プレイヤーが期待効用で結果を評価したときのナッシュ均衡が，それぞれの観測値と同じ (0.96, 0.16)，(0.08, 0.8) になるために必要となる落胆回避測度 β_1 の値を表している。対称では $\beta_1 = 0$，非対称では $\beta_1 = 0.532$，逆の非対称では $\beta_1 = 5$ となっており，いずれも落胆回避傾向にある。β_1 を調整すれば，それぞれ実験結果を説明する理論予測が得られるものの，この落胆回避測度 β_1 は意思決定者の選好関係に特有の性質を表すパラメータである。Goeree and Holt（2001）の実験が，同じ被験者に対して行われていること，また異なる被験者に対する実験でも再現性が高い傾向であ

るため，観測値とナッシュ均衡との乖離を異なる β_1の値に帰着させて説明するのは難しい。

３列目のエルスバーグ均衡では，非対称ゲームの場合，行プレイヤーが $P_1 = [0.5, 1]$，列プレイヤーが $P_2 = [0.125, 0.5]$ を選択すると予測する。観測値の0.96と0.16がそれぞれ P_1と P_2に含まれているため，均衡予測は妥当であると説明する。逆非対称ゲームでは，行プレイヤーが $P_1 = [0, 0.5]$，列プレイヤーが $P_2 = \left[0.5, \frac{10}{11}\right]$ をプレイし，実際の観測値0.08と0.8はそれぞれ P_1 と P_2 に含まれている。これれらのことから，エルスバーグ均衡の理論予測は，観測値と整合的であると説明する。

エルスバーグ均衡は，観測値との一定の整合性を認めるが，次のような難点を含んでいる。まず第一に，プレイヤーの戦略集合に対する最適応答が含まれていない点である。例えば，行プレイヤーは１（T を１の確率でプレイする純戦略）を選ぶ可能性があるにも拘らず，１に対する最適応答０（R を１の確率でプレイする純戦略）が列プレイヤーの戦略集合 $[0.125, 0.5]$ には含まれていない。何故このような戦略集合が均衡として成立するかというと，行プレイヤーの１は，列プレイヤーの混合戦略0.125によってサポートされているからである。これは，エルスバーグ均衡がマックスミン期待効用を用いていることから，予想集合の中で最低確率を用いて評価することに依る。行プレイヤーから見ると，列プレイヤーの0.125が最小期待効用を与える「最小確率」になるため，行プレイヤーはにとっては０と１の間の任意の混合戦略が無差別になるという期待効用と同じ性質を持つからである。つまり，行プレイヤーの１は，列プレイヤーの0.125によって支持されているということになるが，この行プレイヤーの戦略集合の上限である１が観測値0.96を正当化するため，１という戦略を除外できない。同様に，逆非対称ゲームでは，観測値の0.08をサポートするには，列プレイヤーの行動集合に０が含まれなければならないという均衡構築になっている。

なぜ行プレイヤーの多くが，非対称ゲームでは T を，逆非対称ゲームでは B を選ぶのだろうか。非対称ゲームで，行プレイヤーの利得が大幅に増加したとき，単純に行動 T が B に比べて魅力的な行動となる。しかし，T を選ぶことが読まれてしまい，列プレイヤーが R を選ぶと，今度は B が魅力的になる。行プレイヤーが0.96をプレイするとき，列プレイヤーにとって純戦略 L の期待利得は41.6，純戦略 R の期待利得は78.4と圧倒的に R の方が高いにも拘らず，戦略集合から0.125ではなく0.16を選んでいる。同様に，逆非対称ゲームでも，行プレイヤーの観測値を所与とすると，列プレイヤーの純戦略 L の期待利得は76.8，純戦略 R の期待利得は43.2と圧倒的に L の方が高いにも拘らず，戦略集合から10/11ではなく0.8を選んでいる。これらの事実は，戦略集合内では合理性が働いていないと考えざるを得ない。

3.2　RDDA 型効用表現による均衡分析

自己利得が増加した行プレイヤーの均衡戦略が変化するのかしないのか，それを予想する列プレイヤーの均衡戦略が変化するのかしないのかという部分に曖昧さを導入して，ナッシュ均衡との乖離を説明した Riedel and Sass（2014）の分析は極めて画期的である。本節では，Riedel and Sass（2014）で用いたマックスミン期待効用の拡張形である RDDA 型効用表現を導入して，前節で検証した問題点を改善した均衡分析を検証する。

曖昧さのあるゲームを Γ で表すと，プレイヤー i の効用関数が（1）で表されるゲーム $\Gamma = (N, A, (U_i)_{i \in N})$ である。

列プレイヤーは，自分自身の混合戦略も含めて，(T, L)，(T, R)，(B, L)，(B, R) という４つ

の状態に曖昧さがある状況に直面している。しかしながら，行プレイヤーにとって，自分自身の混合戦略の取り方には曖昧さはないので，$\{(T, L), (T, R)\}$ と $\{(B, L), (B, R)\}$ という２事象は互いに曖昧さがない事象である。戦略形ゲームの構造から，自分自身が T を選んでいるか，B を選んでいるかは，列プレイヤーが意思決定をする時点では知りえない情報なので，結局，行プレイヤーにとって曖昧なのは，L か R かという２事象になる。

命題 2　ある $\beta^* \in (-1, \infty)$ が存在して，$\sigma^S(\beta^*) = (0.48,\ 0.48)$，$\sigma^A(\beta^*) = (0.96,\ 0.16)$，$\sigma^R(\beta^*) = (0.08, 0.8)$ がそれぞれゲーム Γ^S，Γ^A，Γ^R の主観的均衡となる。

証明.（1）対称ゲームの主観的均衡

対称ゲームでは，マッチに勝てば80，負けると40になるので，混合戦略をどのように取ったとしても，U_i の値は40と80の間になるのは明らかである。したがって，行プレイヤーの勝ち事象は $\{(T, L), (B, R)\}$ で，負け事象は $\{(T, L), (B, R)\}$ である。このとき

$$U_1(p,P_1) = \frac{80\left[pq_* + (1-p)(1-q^*)\right]}{1+\beta(p(1-q_*)+(1-p)q^*)} + \frac{40(1+\beta)\left[p(1-q_*)+(1-p)q^*\right]}{1+\beta(p(1-q_*)+(1-p)q^*)}$$

ここで $q \in [q_*, q^*]$ は列プレイヤーの混合戦略である。$[q_*, q^*]$ は，行プレイヤーが持つ，列プレイヤーの混合戦略の予想集合を表し，$P_1 = [q_*, q^*]$ である。

このゲームの混合戦略ナッシュ均衡は (0.5, 0.5) である。また

$$\frac{dU_1}{dp} = \frac{-40(1+\beta)(1-q_*-q^*)}{\left(1+\beta(p(1-q_*)+(1-p)q^*)\right)^2}$$

であるから，$q_* + q^* < 1$ であれば $\frac{dU_1}{dp} < 0$，$q_* + q^* > 1$ であれば $\frac{dU_1}{dp} > 0$ である。また，$q_* + q^* = 1$ のときは $\frac{dU_1}{dp} = 0$ となり，任意の p が同じ利得を与える。特に $q_* = q^* = 0.5$ のとき，つまり $q_* + q^* = 1$ かつ $q_* = q^*$（予想集合が一点集合）は，ナッシュ均衡となる。以上は，どのような β の値の下でも成立する。

実際の観察値（0.48, 0.48）に基づき，$p_* = q_* = 0.48$，$P_1 = [0.48, 0.51]$，$P_2 = [0.48, 0.53]$ が主観的均衡であるかを確認する。$P_1 = [0.48, 0.51]$ を所与とすると，$q_* + q^* < 1$ から $\frac{dU_1}{dp} < 0$ であるので，列プレイヤーは $p_* = 0.48$ を選ぶ。逆に，$P_2 = [0.48, 0.53]$ を所与とすると $p_* + p^* > 1$ から $\frac{dU_2}{dp} < 0$ となるため，行プレイヤーは $q_* = 0.48$を選ぶ。したがって，これらは主観的均衡を構成することが確認できた。

（2）非対称ゲーム

(T, L) がプレイされたときの行プレイヤーの利得は320となるため，利得 U_1 の値が80と320の間にあるか40と80の間にあるかで，勝ち事象と負け事象が異なり，確率評価も異なるが，実際は40と80の間になるため

$$U_1(p,P_1) = \frac{320pq_* + 80(1-p)(1-q^*)}{1+\beta(p(1-q_*)+(1-p)q^*)} + \frac{40(1+\beta)\left[p(1-q_*)+(1-p)q^*\right]}{1+\beta(p(1-q_*)+(1-p)q^*)}$$

のみ考えればよい。この場合，

$$\frac{dU_1}{dp} = \frac{-40\left((1+\beta)(1-q^*) - q_*(7+\beta+6\beta q^*)\right)}{1+\beta\left(1-pq_* - (1-p)(1-q^*)\right)}$$

である。実際，U_1の値は観測値 (0.96, 0.16) 周辺で80よりも小さい。

観測値（0.96, 0.16）に基づき，$P_1 = [0.125, 0.16]$，$P_2 = [0.03, 0.96]$ が主観的均衡を構成することを示す。これらの予想集合を所与とすると，行プレイヤーについてみると，$\beta_1 < \frac{1}{17}$ ならば，任意の $p \in [0, 1]$ で $\frac{dU_1}{dp} > 0$ となるため，0.96が P_2 上で最大利得を与える。また，列プレ

イヤーについては，(i) の条件から，$p_* + p^* < 1$ となるので $\frac{dU_2}{dq} > 0$ より，0.16が P_1 上で最大利得を与える。β_1 の条件は $\beta_1 < \frac{1}{17}$ である。

(iii) 逆非対称の場合

同様の計算が非対称の場合にも適用できる。ここでは詳細は省略するが，観測値である (0.08, 0.8) は，$P_1 = [0.08, 0.5]$ と $P_2 = [0.8, 10/11]$ と共に主観的均衡を構成する。β_1 の条件は $\beta_1 < 0.2$ である。

(i)～(iii) より，$\beta_1 < \frac{1}{17}$ であれば，それぞれの観測値を混合戦略として用いる主観的均衡が存在する。■

RDDA 型効用の下では，行プレイヤーの自己利得の増加（320）に応じて，利得が増加した行動（T）に大きな確率を付与するという戦略の変更は，そのこと自体が直接的に，列プレイヤーがより曖昧回避的になる，つまりは予想集合が拡大するという影響を与える。これは，列プレイヤーが行動（L）にナッシュ均衡以上に大きな確率を付与することを許し，行プレイヤーの自己利得効果を正当化し，その結果，互いに最適応答になるという若干複雑な構造になる。重要なのは，行プレイヤーの自己利得効果だけではなく，その背後には列プレイヤーの予想集合の拡大，言い換えると主観的な曖昧さの増大がある。この効果は，逆の非対称の場合も同様である。この自己利得効果と相手の予想集合の拡大が均衡行動を支える原動力となっているが，共に RDDA 型効用の下で引き起こされる直接的な変化である。

4.　結　　　論

本研究は，RDDA 型効用表現をプレイヤーの選好に導入し，曖昧さを伴う戦略の下でのゲームの均衡を再検討した。RDDA 型効用表現は，基数性，曖昧さ回避傾向が生起確率に伴い変化するという点が特長であり，これらは混合戦略の分析に役立つ性質である。Goeree and Holt（2001）の反例においては，自己利得効果が相手の予想集合の拡大を引き起こし，ナッシュ均衡とは異なる均衡行動を正当化することが可能となった。

RDDA 型効用表現は，Machina（2014）の主観的共通比率効果に対応している。オリジナルの共通比率効果に対応する価値関数は，Khanemann and Tversky（1979）や Tversky and Khanemann（1992）の価値関数が有名であるが，これらの価値関数は通常，基数性を満たさない場合が多い。したがって，共通比率効果に対応していて基数性を満たす RDDA 型効用表現は，多様なゲーム分析に応用することができ，新たな知見をもたらす可能性を持つため，今後も本研究で提案した手法がこうした研究の進展に役立つことが期待される。

注

1） μ が非加法的測度（容量）であるとは，(i) $\mu(\phi) = 0$，すべての $S \in \Sigma$ について $\mu(S) \geq 0$，(ii) $S \subset T$ なるすべての $S, T \in \Sigma$ について $\mu(S) \leq \mu(T)$，(iii) $\mu(\cup_{A \in \Sigma} A) = 1$ のときをいう。
2） 非加法的測度 μ が優加法的であるとは，$A \cap B = \emptyset$ なるすべての $A, B \in \Sigma$ にかんして $\mu(A) + \mu(B) \leq \mu(A \cup B)$ であるときをいう。
3） 非加法的測度 μ が凸であるとは，すべての $A, B \in \Sigma$ にかんして $\mu(A) + \mu(B) \geq \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B)$ であるときをいう。
4） p_0^S は行プレイヤーが T をプレイする確率，q_0^S は列プレイヤーが L をプレイする確率である。

参　考　文　献

Alon, S. and D. Schmeidler, "Purely Subjective Maxmin Expected Utility," *Journal of Economic Theory*, Vol. 152, July, 2014, pp. 382–412.

Burghart, D., T. Epper and E. Fehr "The Ambiguity Triangle: Uncovering Fundamental Patterns of Behavior Under Uncertainty," in CESifo Working Paper Series No. 5420, 2016.

Azrieli, Yaron, and Roee Teper. "Uncertainty aversion and equilibrium existence in games with incomplete information." *Games and Economic Behavior* 73.2 (2011): 310–317.

Eichberger, J. and D. Kelsey. "Non-additive beliefs and strategic equilibria." *Games and Economic*

Behavior 30.2 (2000): 183–215.

Ellsberg, E. "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms," *Quarterly Journal of Economics* 75 (1961): 643–669.

Faruk, G. "A theory of disappointment aversion," *Econometrica* (1991): 667–686.

Ghirardato, P. and M. Marinacci. "Risk, ambiguity, and the separation of utility and beliefs." *Mathematics of Operations Rresearch* 26.4 (2001): 864–890.

Gilboa, I. and D. Schmeidler, "Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 18, 1989, pp. 141–153.

Goeree, Jacob K. and Charles A. Holt. "Ten little treasures of game theory and ten intuitive contradictions," *American Economic Review* (2001): 1402–1422.

Grant, S., I. Meneghel and R. Tourky. "Savage games." *Theoretical Economics* 11.2 (2016): 641–682.

Horie, M. "Cardinal Utility Representation Separating Ambiguous Beliefs and Utility," *KIER Discussion Paper Series* No. 972, 2017, Institute of Economic Research, Kyoto University.

Kahneman, D. and A. Tversky. "Prospect theory: An analysis of decision under risk." *Econometrica* (1979): 263–291.

Lo, K. C. "Equilibrium in beliefs under uncertainty," *Journal of Economic Theory* 71.2 (1996): 443–484.

Machina, Mark J. "Ambiguity aversion with three or more outcomes." *American Economic Review* 104.12 (2014): 3814–40.

Marinacci, M. "Ambiguous games." *Games and Economic Behavior* 31.2 (2000): 191–219.

Nash, J. F. "Equilibrium points in n-person games," *Proceedings of the national academy of sciences* 36.1 (1950): 48–49.

Riedel, F. and L. Sass. "Ellsberg games." *Theory and Decision* 76.4 (2014): 469–509.

Savage, L. J. *The Foundations of Statistics*, New York, Wiley, 1954.

Schmeidler, D. "Subjective probability and expected utility without additivity," *Econometrica* (1989): 571–587.

Tversky, A. and D. Kahneman. "Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty," *Journal of Risk and uncertainty* 5.4 (1992): 297–323.

von Neumann, J. and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*, Princeton university press, 1944. 2nd edition 1947, 1953.

岡田　章（2011）『ゲーム理論 新版』有斐閣

堀江真由美（2016）「戦略形ゲームにおける曖昧さ回避行動の分析」，経済研究論集（広島経済大学），第39巻第１・２号，27～35頁．