

ユニットによる星形多面体の構成

三村 文武*・岩下 有里**

はじめに

ケプラーは星形化によって正8面体からは合同な正3角形で囲まれた星形8面体(2個の正4面体の複合体)を、正12面体からは合同な星形正5角形で囲まれた小星形12面体と大星形12面体を発見した¹⁻³⁾。さらにポアンソーは正12面体からは交差する合同な正5角形で囲まれた大12面体を、正20面体からは交差する合同な正3角形で囲まれた大20面体を発見し^{4,5)}、コーシーは正多面体の星形化によって得られる星形正多面体(一様な星形多面体)はこれで全部であることを証明した⁶⁾。正12面体の星形多面体は前述の3種しか存在しない。正20面体の他の星形化については、ブリュクナーの多面体に関する研究⁷⁾以後、コクセターがデュ・バル、フラザー、ペトリと共同で体系的な研究を行い、正20面体の星形多面体が59種ありしかもこれで全部であることを証明した⁸⁾。また一様多面体については、5種の正多面体(プラトンの立体)及び13種の準正多面体(アルキメデスの立体)に続き、バドルーが37種を発見した⁹⁾。更にコクセターとミラーは新たに発見した12個を含め75種の一様多面体を数え上げ、スキリングがこれで全部であることを証明した¹⁰⁾。

ウエニンガーは数学的に存在が証明されたこれらの多面体を実現しようと試み、実際に星形パターン¹¹⁾から一つ一つの多面体についての

ネットを見出し、これを基に多面体の面となるパーツを作って貼り合わせることで75種の一様多面体と代表的な星形多面体を組み立てた¹²⁾。三村はウエニンガーのようにパーツを接着するかわりに、継手のあるユニットを組み込む方法で多くの多面体の製作を試みた。最初に用いられた2辺の比が $1:\sqrt{3}$ の長方形($\sqrt{3}$ -長方形)から折りだす3角ユニット(T-ユニット: Triangular unit)¹³⁾は2辺の比が $1:a$ ($0 < a \leq 2$)の長方形から折りだす一般3角ユニット(GT-ユニット: Generalized triangular unit)へと発展し、正12面体の星形多面体及び正20面体のいくつかの星形多面体や複合体の製作が可能となった¹⁴⁻¹⁶⁾。本稿では星形多面体と複合体に焦点を絞り、注の文献14-16)に解説しているそれらの製作法に新たな図を付加して詳述した。各多面体のユニットは、星形パターンの中に現れる目的の多面体を構成する面に対応する3角形をもとに決定される。

1. GT-units

長方形ABCDの辺AD, BCの中点をそれぞれM, Nとする。図1.1(点線は谷折り)には二つの場合がある。上段の $CM' < CD/2$ の場合: 辺CD上に点M'がくるように折線NFをいれMと重なる辺CD上の点をM'とする。同様に折線MEをいれ辺AB上の点N'を定める。NM', NFの順に、続いてMN', MEの順に折り込む。下段の $CM' \geq CD/2$ の場合: NM'を折りCM'上にCM'とNFとの交点M''を定める。同様にAN'上にN''を定める。ユニットによっては、 $\angle MNF = \angle NME$ が小さい場合や複

* 広島経済大学経済学部教授

** 福岡教育大学大学院教育学研究科修士課程(現
青山商事株式会社)

(Received, June 14, 2011)

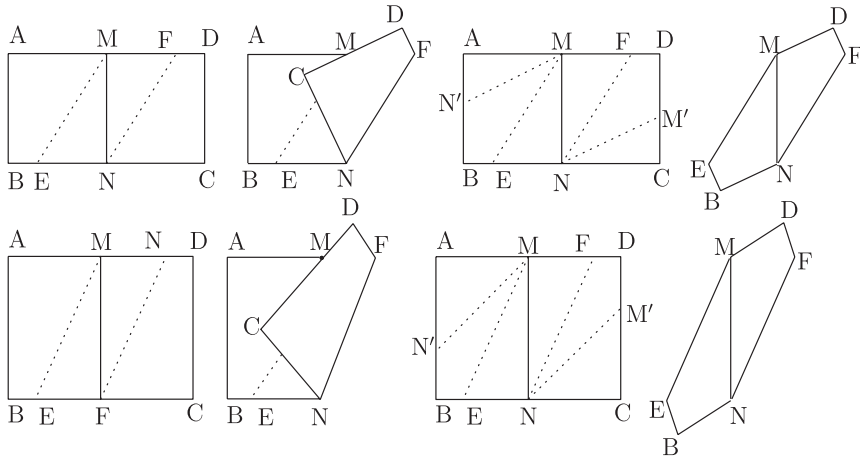


図 1.1 GT-units の折り方

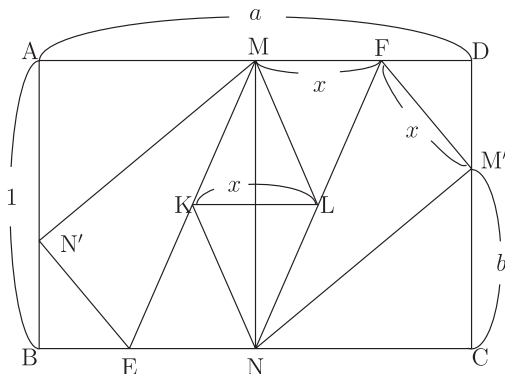
雑な折り込みを入れる場合など、 $\triangle NCM''$ と $\triangle MAN''$ を切除してもよい。

2 辺の比が $1:a$ の長方形を a -長方形と呼ぶ。図 1.2 の折り線の入った長方形 ABCD において、図 1.2 のように $AB=NM'=1$, $AD=a$ ($0 < a \leq 2$), $CM'=b$, $MF=FM'=x$ とおく。このとき $NM'^2 = NC^2 + CM'^2$ より $CM' = b = \sqrt{1-a^2/4}$, $DM'=DC-CM'=1-\sqrt{1-a^2/4}$ 。従って $FM'^2 = FD^2 + DM'^2$ は

$$x^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right)^2$$

となり、次の関係式が得られる：

$$(*) \quad x = \frac{2 - \sqrt{4 - a^2}}{a}, \quad a = \frac{4x}{1 + x^2}, \quad b = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

図 1.2 a -長方形

これより図 1.1 の上段 ($0 \leq b < 1/2$) と下段 ($1/2 \leq b \leq 1$) の a -長方形は、それぞれ $\sqrt{3} < a \leq 2$ と $0 < a \leq \sqrt{3}$ の場合である。

2. 正12面体の星形多面体

小星形12面体と大星形12面体

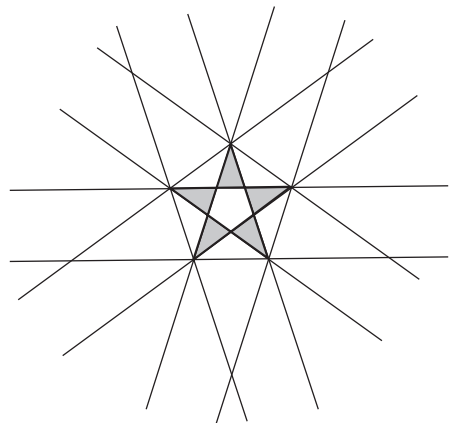


図 2.1 小星形 12 面体の面

小星形12面体と大星形12面体に現れる3角形の面は相似であり、各頂点の周りはそれぞれ正5角錐と正3角錐である。この3角形が図 1.2 の $\triangle MKL$ となるような a -長方形を定める。図 2.3 の星形正5角形において、 $BE:BQ = \sqrt{5}+1:2$ より $\triangle APQ$ は $AP:AQ:PQ = 1:1:$

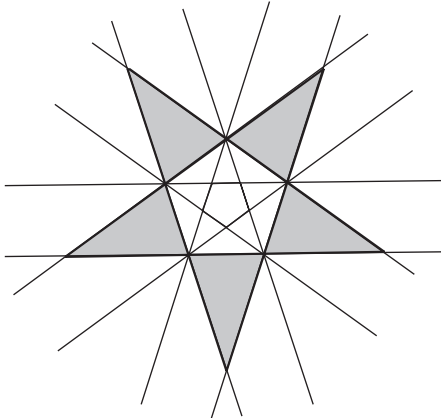


図 2.2 大星形 12 面体の面

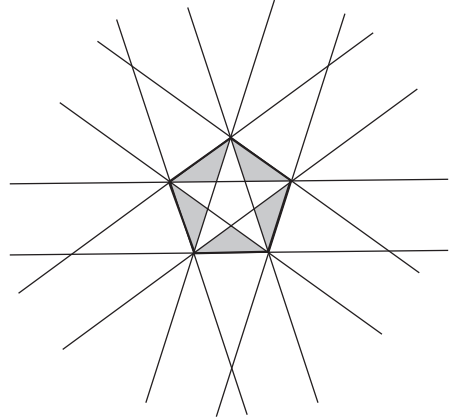


図 2.4 大12面体の面

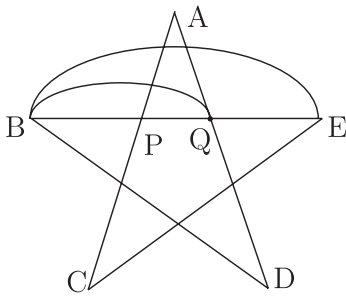


図 2.3 星形正 5 角形

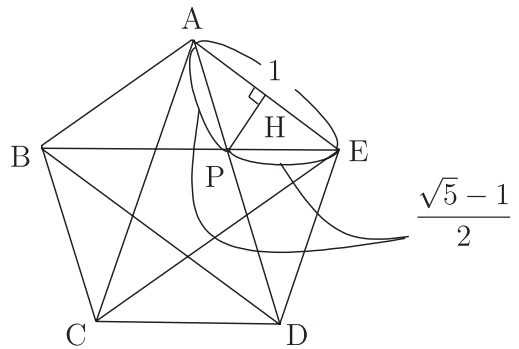


図 2.5 正 5 角形と星形正 5 角形

$(\sqrt{5}-1)/2$ の 2 等辺 3 角形である。 $\triangle MKL$ がこのような 3 角形となるような x を定めて式 (*) より a, b を求めるとそれぞれ次のようになる：

$$x = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$$

$$a = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \doteq 1.1756$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{5}-1} \doteq 0.8090$$

したがって x, a, b は次のように定まる：

$$x = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$a = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \doteq 1.9021$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{5}+1} \doteq 0.3090$$

3. 正20面体の星形多面体

正20面体第 1 の星形 (60面体)

図 3.1 において、正20面体の星形パターンは正 3 角形 ABC の各辺を黄金分割していることから、 $\triangle ABP$ ($AB = \sqrt{5}+1, BP = \sqrt{5}-1$) における余弦定理：

$$AP^2 = AB^2 + BP^2 - 2 \cdot AB \cdot BP \cos 60^\circ$$

大12面体

大12面体の面に現れる 3 角形は図 2.5 のように辺の比が $AP : PE : EA = (\sqrt{5}-1)/2 : (\sqrt{5}-1)/2 : 1$ である。 AE を図 1.2 の MN に対応させ、点 P から辺 AE に下ろした垂線の足を H とすると $AE : PH = 2 : \sqrt{5}-1 = MN : KL/2$ である。

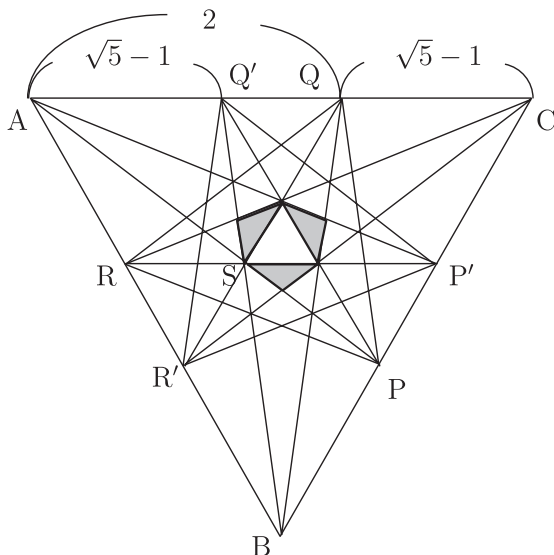


図 3.1 正20面体の星形パターンに現れる第1の星形の面

より $AP = 2\sqrt{2}$ である。また $AS : AP = AR' : AB$, 即ち $AS : 2\sqrt{2} = 2 : \sqrt{5} + 1$ より $AS = \sqrt{10} - \sqrt{2}$ である。次に $\triangle ARS$ における正弦定理:

$$\frac{AR}{\sin \angle PSP'} = \frac{AS}{\sin 120^\circ}$$

より $\sin \angle PSP' = \sqrt{6}/4$ である。したがって図 1.2 における $\triangle MNK$ が目的の3角形となるような $x = \tan \angle PSP'$, a, b は次のように定まる:

$$x = \frac{\sqrt{15}}{5}, \quad a = \frac{\sqrt{15}}{2} \div 1.9365, \quad b = \frac{1}{4} = 0.25$$

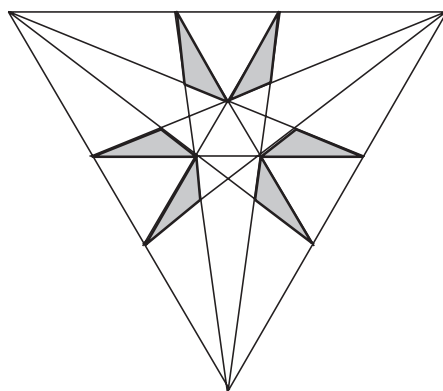


図 3.2 正20面体第7の星形の面

正20面体第7と第8の星形

図 3.3 において, 正3角形 ABC の各辺上の点 P, Q, R はそれらの点を通る辺を黄金分割し $\angle APQ = \angle PAB$ であるから, 正20面体第7と第8の星形の面は同じ a -長方形から作り出せる。辺 AB 上に $AB \perp QH$ となるような点 H をとり, AP と QH の交点を S とする。
 $AB = \sqrt{5} + 1$ のとき, $PQ = QC = 2$, $AQ = \sqrt{5} - 1$, $AH = (\sqrt{5} - 1)/2$ である。従って $QH^2 = AQ^2 - AH^2$ より

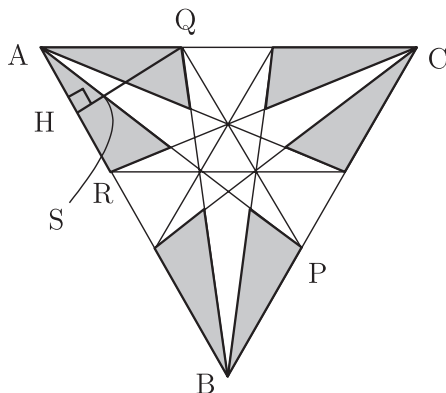


図 3.3 正20面体第8の星形の面

$$AH = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad QH = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}$$

である。また $\triangle PQS$ と $\triangle AHS$ は相似であるから $PQ:QR=AH:HR=AH:QH-QR$ 、即ち $(AH+PQ) \cdot QR=PQ \cdot QH$ である。従って $QR=2(\sqrt{15}-2\sqrt{3})$ であり

$$\tan \angle PAB = \frac{HS}{AH} = \frac{QS}{PQ} = \sqrt{15}-2\sqrt{3}$$

である。ここで、 $\angle PAB$ を図 1.2 の $\angle NME$ に対応させると x, a, b は次のようになる：

$$x = \sqrt{15}-2\sqrt{3}, \quad a = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}$$

$$b = \frac{3\sqrt{5}-1}{8}$$

$a = (\sqrt{15}+\sqrt{3})/4$ は $\sqrt{2}$ に非常に近いので、ユニットは $\sqrt{2}$ -長方形から作ればよい。このとき $b = \sqrt{2}/2$ 、従って図 1.1において $\angle AMN' = \angle CNM' = 45^\circ$ である。

正20面体第9の星形

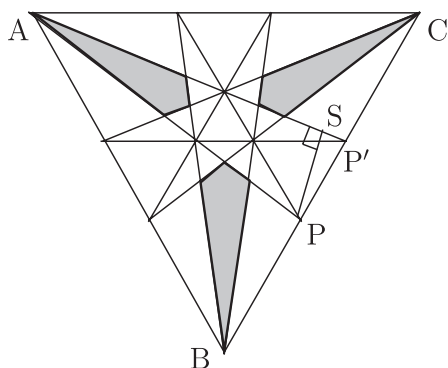


図 3.4 正20面体第9の星形の面

正3角形 ABC の辺 BC 上の点 P, P' はその辺を黄金分割する点である。 $AB = \sqrt{5}+1$ のとき $\triangle APP'$ は $AP = AP' = 2\sqrt{2}$ 、 $PP' = 3-\sqrt{5}$ の2等辺3角形である。辺 AP' 上に $AP' \perp PS$ となる点 S をとると、 $\triangle APS$ と $\triangle PPS$ において

$$\begin{aligned} PS^2 &= AP^2 - AS^2 = PP'^2 - P'S^2 \\ &= PP'^2 - (AP' - AS)^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。これより

$$AS = \frac{3\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}, \quad PS = \frac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{4}$$

となり、従って

$$\tan \angle PAS = \frac{PS}{AS} = \frac{4\sqrt{3}-\sqrt{15}}{11}$$

である。ここで $\angle PAS$ を図 1.2 の $\angle NME$ に対応させると x, a, b は次のようになる¹⁷⁾：

$$x = \frac{4\sqrt{3}-\sqrt{15}}{11}, \quad a = \frac{7\sqrt{3}-\sqrt{15}}{8}$$

$$b = \frac{7+3\sqrt{5}}{16}$$

a は1に非常に近いので、ユニットは正方形から作ればよい。このとき $b = \sqrt{3}/2$ である。

10個の正4面体の複合体

この多面体の各頂点の周りには正4面体の頂点の周りの正3角錐が2つずつ 60° の回転角度差で集まり、星の形の12個の凹5角錐が細長いV字形の凹4角錐によって結合している。これらの角錐は2種のユニットから作ることがでる。

図 3.5 の $\triangle ABC$ において P と P' 、 Q と Q' 、 R と R' はそれぞれ辺 BC 、辺 CA 、辺 AB を黄金比に分割する点である。 PQ' と $P'R$ 、 PQ と PR 、 BQ と PR 、 BQ と $P'R$ 、 RQ' と PR の交点をそれぞれ S, T, U, V, W とする。まず、凹四角形 $PTP'S$ の面を構成するユニットを考える。図 3.1 で考察したように、 $AB = \sqrt{5}+1$ のとき $BP = \sqrt{5}-1$ 、 $AP = 2\sqrt{2}$ であるから、 $\triangle ABP$ における正弦定理：

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sin \angle BAP} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}$$

より

$$\sin \angle BAP = \frac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{8} \doteq 0.3785$$

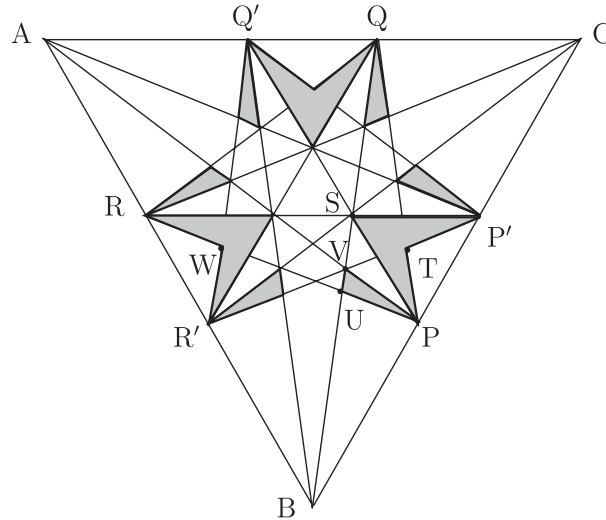


図 3.5 10個の正4面体の複合体の面

となり、 $\angle BAP \doteq 22^\circ$ である。従って $PQ \parallel BQ'$ に注目して、 $\angle SPT = \angle PQ'B = \angle APQ' = \angle PAB$ より $\angle SPT \doteq 22^\circ$ となる。

次に、 $\triangle PUV$ を作りだすためのユニットについて考える。 $\triangle PTS$ において $PT : \angle PST = PS : \angle PTS$ より

$$PT \doteq \frac{\sin 30^\circ}{\sin 128^\circ} \cdot PS \doteq \frac{0.5000}{0.7880} \cdot PS \\ \doteq 0.6345 \cdot PS$$

である。 $QB \parallel P'Q'$ に注目して

$$\angle PUV = \angle PWQ' = \angle RWR' = \angle PTP' \\ = 2 \cdot \angle SPT + 60^\circ \\ \doteq 104^\circ$$

である。他方、 $VA \parallel P'Q'$ 、 $VQ \parallel R'Q'$ より $\angle PVU = \angle P'R'Q' = 60^\circ$ である。ゆえに $\triangle PUV$ において $PV : \angle PUV = PU : \angle PVU$ より

$$PV \doteq \frac{\sin 104^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot PU \doteq \frac{0.9703}{0.8660} \cdot PU \\ \doteq 1.1204 \cdot PU$$

これに上で求めた $PU = PT \doteq 0.6345 \cdot PS$ を代入すると $PV \doteq 0.7019 \cdot PT$ となる。

この多面体を構成する星の形の12個の凹5角

錐の面である凹4角形 $PTP'S$ は $\sqrt{3}$ -長方形から得られる5個のユニットから作ることができる。また、30個の細長いV字形の凹4角錐は $\angle UPV = \angle PAP'$ より、正20面体第9の星形と同様に正方形から始めればよい。その辺は $\sqrt{3}$ -長方形の短い辺の $2 \cdot PV \doteq 1.4218$ 倍ある。

4. 20・12面体の星形

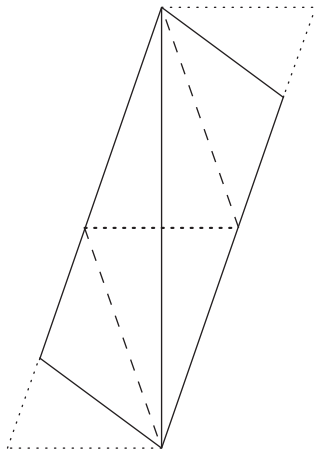
20・12面体第7の星形

この多面体は、大12面体と20面体の第7の星形との複合体である。大12面体の凹正3角錐から第7の星形の先が突き出している。正20面体の第7の星形のユニットは既に前節で考察したように $(\sqrt{15} - 2\sqrt{3})$ -長方形に非常に近い $\sqrt{2}$ -長方形から作ることができる。また、20面体の第7の星形によって切り取られた大12面体の部分は、等角が 36° の2等辺3角形が10個集まってできた星形正5角錐をなしている。この複合体は60枚の $\sqrt{2}$ -長方形で作ったユニットの一端を星形正5角錐ができるように変形して実現することができる。

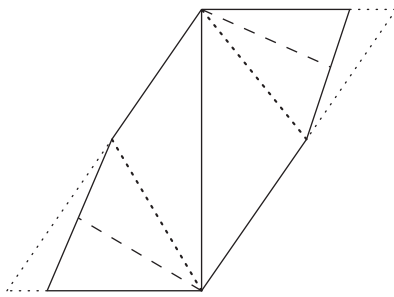
5. 星形多面体とそのユニット

図の --- は山折り …… は谷折りを表す。

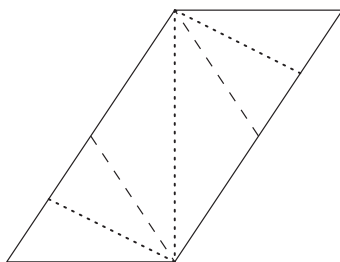
正12面体の星形と正20面体第1の星形



小星形12面体
大星形12面体



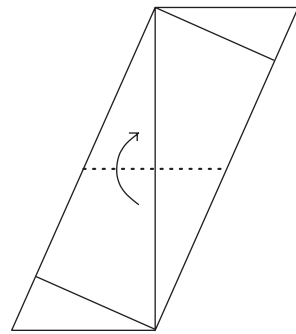
大12面体



正20面体第1の星形

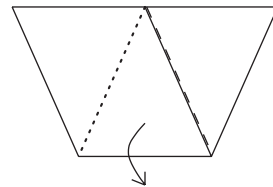
正20面体第7の星形

①

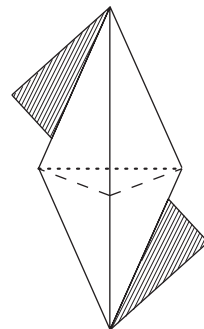


スリットを合わせるようにして
折り目を入れる

②

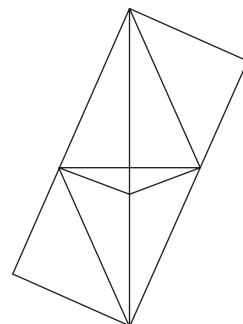


③



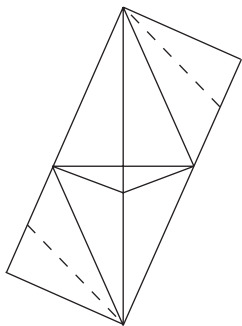
斜線部を切り取る

④

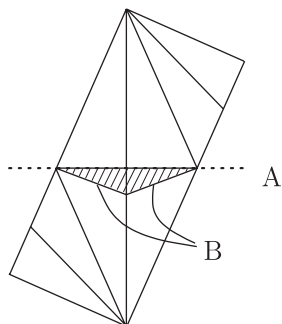


③の折り目をもとに戻す

⑤



⑥

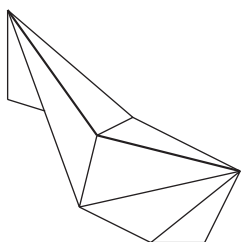


斜線部に糊を付けてA線を谷折りする

⑦

糊付け部分を裏側からつまみ B線とスリットを谷折りする

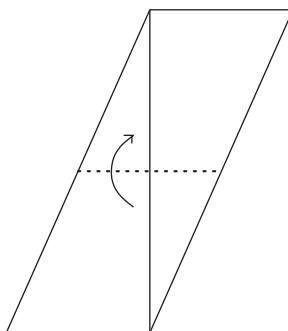
⑧



できあがり（図の太線がスリット）

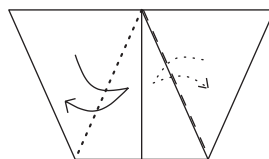
正20面体第8の星形

①



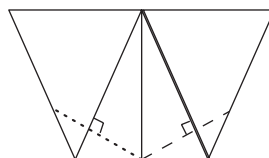
スリットを合わせるようにして折り目を入れる

②

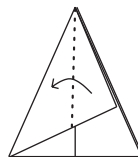


折り目を入れて戻す

③

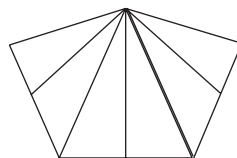


④



裏も同様に折り目を入れる

⑤



開く

33ページに続く。

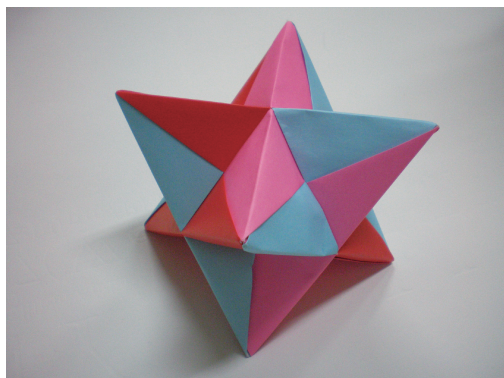


写真 5.1 星形8面体

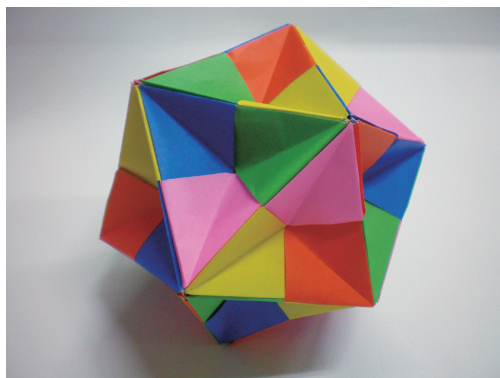


写真 5.4 大12面体



写真 5.2 小星形12面体



写真 5.5 正20面体第1の星形

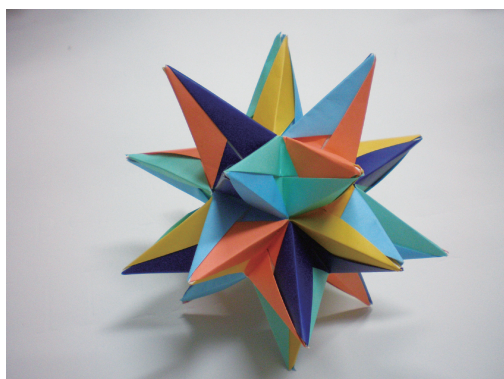


写真 5.3 大星形12面体

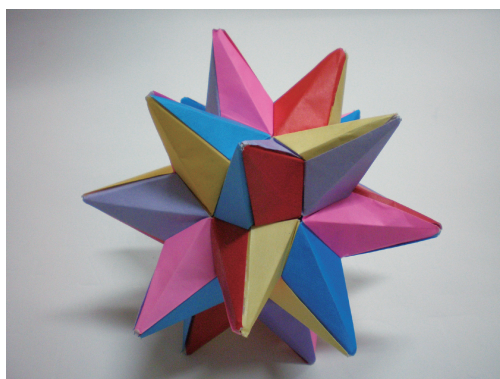


写真 5.6 正20面体第7の星形

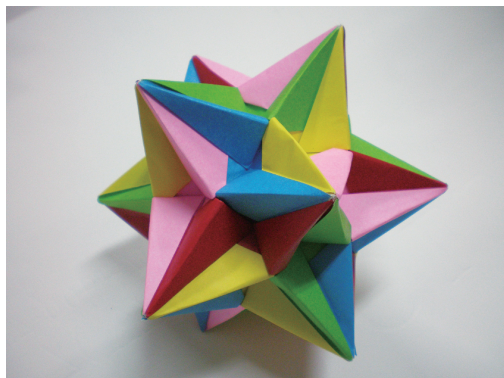


写真 5.7 正20面体第8の星形

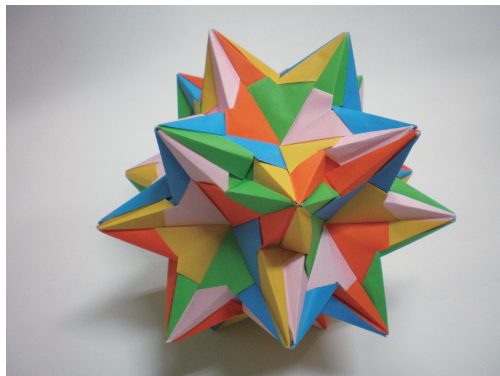


写真 5.9 10個の正4面体の複合体

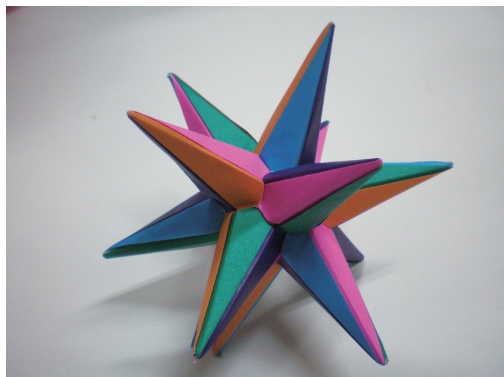
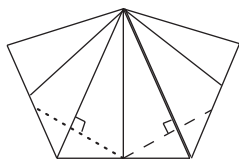


写真 5.8 正20面体第9の星形



写真 5.10 20・12面体第7の星形

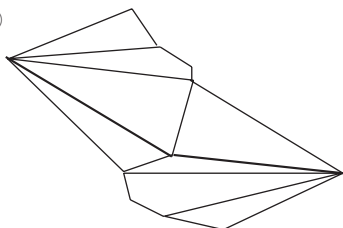
⑥



⑦

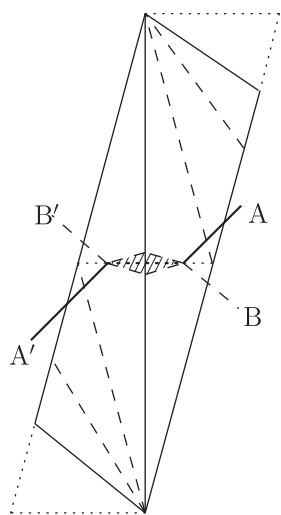
⑥の折り目を入れたままスリットが見えるように開く

⑧



できあがり（図の太線がスリット）

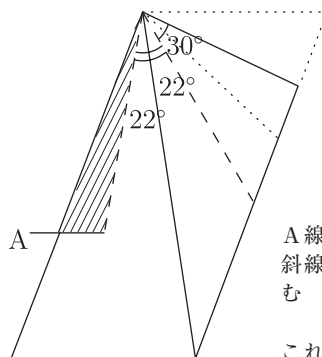
正20面体第9の星形



A, A' の切り込みを入れB, B' を山折りする

折り線に沿って折り斜線部を糊付け（第7の星形と同様）する

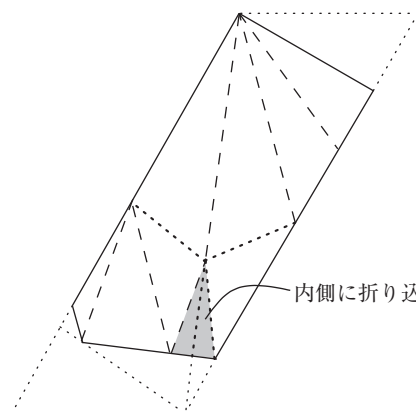
10個の正4面体の複合体



A線に切り込みを入れ斜線部を内側に折り込む

これらをつなぐユニットの折り方は第8の星形と同様

20・12面体第7の星形



内側に折り込む

謝 辞

福岡教育大学櫻井孝俊教授には、教育学的視点から教材としての星形立体の教育的意義について多くの有益なご助言を戴きました。ここに深く感謝の意を表します。

注

- 1) J. Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, Tübingen (1595).
- 2) J. Kepler, *De Nive Sexangula*, Prague (1611).
- 3) J. Kepler, *Harmonices Mundi Libri V*, Linz (1619).
- 4) L. Poincaré, *Note sur la Théorie des Polyèdres*, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (1860), pp. 65-79.
- 5) L. Poincaré, *Mémoire sur les Polygones et les*

- Polyèdres, J. École Polytechnique **10** (1810), pp. 16–48.
- 6) A. L. Cauchy, Recherches sur les Polyèdres, J. École Polytechnique **9** (1813), pp. 68–86.
 - 7) M. Brückner, Vielecke und Vielfache, Teubner (1900).
 - 8) H. S. M. Coxeter, P. Du Val, H. T. Flather and J. F. Petrie, The fifty-nine icosahedra, University of Tront Press (1954).
 - 9) A. Badoureau, Mémoire sur les Figures Isosceles, J. École Polytechnique **49** (1881), p. 51.
 - 10) J. Skilling, The Complete Set of Uniform Polyhedra, Philosophical Trans. Royal Soc. London (series A) **278** (1975), pp. 111–135.
 - 11) P. R. Cromwell, Polyhedra, Cambridge University Press (1971), p. 267, p. 268; See also p. 42 in (10).
 - 12) M. J. Wenninger, Polyhedron Models, Cambridge University Press (1971).
 - 13) 写真 5.1 の星形 8 面体はこのユニットから構成される。
 - 14) 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型Ⅲ, 九州工業大学研究報告 No. 49 (1984), pp. 77–85 (p. 80 表-1 の正12面体, 大12面体における3角形の辺の比はそれぞれ $2:2:\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $2:2:\sqrt{5}$ である)。
 - 15) F. Mimura, Some Stellated Polyhedrons Constructed by Paper Units, HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sci. Vol. 32–No. 1 (2009), pp. 3–8.
 - 16) F. Mimura, Two Compounds Constructed by Paper Units, HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sci. Vol. 32–No. 3 (2009), pp. 27–30.
 - 17) The denominator 11 of the value of b in the second line from the bottom of p. 7 in the reference 16) should be read 16.