広島経済大学経済研究論集
第37巻第４号　2015年３月

無限繰り返しゲームにおける公共財の自発的拠出モデル
——グループ規模，時間割引率——

新　垣　繁　秀*

は　じ　め　に

実際の生活の中で，多くの個人は自らの利益のため，ある程度自発的に公共財を提供している[1)]。自発的に提供される公共財として，個人の庭・垣根の整備，街灯設置等をあげることができる。しかし，多くの個人はその財の持つ外部性を考慮に入れず，自らの主体均衡を解くのみでその拠出量負担を決定する。そのため社会的に見て最適な公共財の拠出量に比べ，自発的な公共財の総拠出量は過少拠出となる。

さらに地域社会の中では，地域の消防団，自宅周辺の一斉清掃等，公共の利益のため，公共財への拠出負担が必要とされる状況は数多くある。当然，積極的に拠出負担をする個人もいれば，それから免れようとする個人も多数存在する。いわゆる，フリーライド問題である。このことは，他の住民（プレイヤー）の負担する公共財拠出量を所与とみなし，ナッシュ推測のもと，ナッシュ均衡において公共財を拠出すれば，各住民の拠出量は社会的に最適な拠出量より過少となることで説明される。また Olson（1965）の先駆的研究で展開されたように，グループ規模が拡大しメンバー数が多くなると，公共財の拠出負担から離脱するインセンティブが高まり，大規模グループでは，公共財拠出の集合行為を一層困難にしていると考えられる。

いずれにせよ各個人の公共財の拠出負担に関する集合行為は，社会的最適な拠出量から乖離する。公共財の理論は，そのことを分析の出発点とし，様々な方向へ研究がなされてきた[2)]。

本稿では，公共財を如何に社会的最適量の実現する方向へ導くか，繰り返しゲームの枠組みから考察していく。まず第１節では基本モデル提示と幾つかの確認をする。そこでは *one-shot* ゲーム（静学モデル）における公共財の過少拠出およびグループ規模の公共財拠出への影響について考察し，続く第２節ではゲームの構造を繰り返しゲームの動学ゲームの枠組みで，それらを捉え直していく。

1.　基本モデル―過少拠出および非効率性―

1.1　静学モデル（**One-shot** ゲームにおける自発的拠出モデル）

本節では，Bergstrom, Blume and Varian（1986）をベースにしながら，公共財の自発的拠出の基本モデルを展開する。

n 人のプレイヤー（$N=\{1, \cdots, i, \cdots, n\}$）が存在し，私的財と公共財はそれぞれ一種類ずつ存在する。プレイヤー i は，初期の所得を公共財への拠出と私的財の購入に配分する。公共財の拠出総量を G，各プレイヤー i の公共財への自発的拠出量を g_i，私的財消費量を x_i と表わす。各プレイヤー i から公共財拠出 g_i の総量を G とし，その集計関数を単純合計とし次式で表わす（summation タイプ）。右辺第２項はプレイヤー i 以外の公共財の拠出量合計である。また各プレイヤー i の拠出量は負とならない。

＊ 広島経済大学経済学部准教授

$$G=\sum_{i=1}^{n} g_i = g_i + \sum_{i\neq j} g_j,\quad g_i \geq 0$$

各プレイヤーの効用関数を次式で示す。

$$u = u_i(x_i, G)$$

効用関数は厳密な準凹関数で，2回連続微分可能，増加関数とする。また私的財，公共財ともに正常財とする。ここでは私的財との自発的公共財の限界変形率は1とする。

各プレイヤーは，効用最大化を考えながら初期所得を私的財の購入と公共財への拠出に配分する。従って，予算制約下のナッシュ均衡解は次の効用最大化問題を解くことで求められる[3)]。

$$\max_{x_i g_i}\ u_i(x_i, g_i + G_{-i}),\ G_{-i} = \sum_{i\neq j} g_j \qquad \text{(NE)}$$
$$s.t.\ \ x_i + g_i = y_i,\ i = 1,\ldots,n$$

内点解を仮定すれば，1階条件として

$$MRS_{xi,gi} = \frac{\partial}{\partial G}u_i(x_i, g_i + G_{-i}) \Big/ \frac{\partial}{\partial x_i}u_i(x_i, g_i + G_{-i}) = 1,$$
$$i = 1,\ldots,n \qquad (1)$$

が得られる。陰関数定理が成立していると仮定すれば，プレイヤー i の公共財拠出量 g_i は G_{-i} の関数として表わすことができ，その最適反応関数を，

$$g_i = \varphi_i(y_{i,} G_{-i}) - G_{-i},\ i = 1,\ldots,n \qquad (2)$$

と表すことができる。プレイヤー i の拠出量は，他のプレイヤーからの拠出量の減少関数となっている。

ナッシュ均衡は，この n 個の方程式から計算され，解を次のように表記する。

$$(x_i^{ne}, g_i^{ne}) = (\gamma_i(y_{i,} G_{-i}^{ne}),\ \varphi_i(y_{i,} G_{-i}^{ne}))$$

この時，プレイヤー i の公共財需要関数を $\varphi_i(y_{i,} G_{-i})$ と表記すれば，プレイヤー i の公共財需要量 G_i^{ne} は，

$$G_i^{ne} = \max\{\varphi_i(y_{i,} G_{-i}^{ne}),\ G_{-i}^{ne}\} \qquad (3)$$

で表される。

両辺から G_{-i}^{ne} を引くと，ナッシュ均衡におけるプレイヤー i の自発的公共財の拠出量 g_i^{ne} は，

$$g_i^{ne} = \max\{\varphi_i(y_{i,} G_{-i}^{ne}) - G_{-i}^{ne},\ 0\} \qquad (4)$$

となる。

最後に，公共財の自発的供給が公共財の社会的にパレート最適供給に達しないことを確認しておく。公共財の社会的にパレート最適供給に関する Samuelson（1954）の最適条件は，

$$\sum_{i=1}^{n} MRS_{Gx_i}^{i} = 1^{4)} \qquad \text{Samuelson 条件}$$

である。パレート拠出量 (g_i^P, G_{-i}^P) はこの条件式を満たさないといけない。これは公共財の自発的拠出モデルの1階条件とは異なることから，自発的拠出は社会的最適量で拠出されていないことが知れる。特にナッシュ均衡解において，公共財の自発的拠出水準は，社会的最適（パレート効率）拠出量からみて，過少拠出となる[5)]。

1.2　コブ＝ラグラス効用関数

ここでは効用関数をコブ＝ラグラス効用関数 $x_i^{\alpha}(g_i + G_{-i})^{1-\alpha}$ に特定化して，公共財の自発的拠出を考察していく。また公共財を拠出するプレイヤーは同質として対称均衡を分析することにする。すべてのプレイヤーの所得 y_i は同一水準とする。各プレイヤーの最大化問題は，

$$\max_{x_i, g_i}\ x_i^{\alpha}(g_i + G_{-i})^{1-\alpha},\ 0<\alpha<1 \qquad (5)$$
$$s.t.\ \ x_i + g_i = y_i,\ G_{-i} = \sum_{i\neq j} g_j,\ i = 1,\ldots,n$$
$$x_i \geq 0,\ g_i \geq 0$$

となる。この最大化問題を解くと，プレイヤー i の最適反応関数は，

$$g_i = (1-\alpha)y_i - \alpha G_{-i},\ \ i = 1,\ldots,n \tag{6}$$

となる。また同質プレイヤーの仮定から,

$$G_{-i} = (n-1)g_i \tag{7}$$

である。この二つの式より,（n 人非協力）公共財拠出ゲームのプレイヤー－ i の拠出量 g_i^{ne} および公共財拠出総量 G^{ne} は，それぞれ,

$$g_i^{ne} = \frac{(1-\alpha)y_i}{1+\alpha(n-1)} \quad i = 1,\ldots,n \tag{8}$$

$$G^{ne} = \frac{(1-\alpha)y_i}{1+\alpha(n-1)}n \tag{9}$$

で決まる。また公共財の Samuelson の最適条件から，公共財の最適拠出量 G^P は,

$$g_i^P = (1-\alpha)y_i,\ \ i = 1,\ldots,n \tag{10}$$

$$G^P = (1-\alpha)ny_i \tag{11}$$

である。以上の結果から，$(1-\alpha)$ が大きい程（公共財への選好が高い程），公共財の拠出量は大きいが，公共財の自発的拠出量は最適な拠出量より過少となる。

また，上述のナッシュ均衡拠出量（8）式－（9）式と（5）式，およびパレート均衡拠出量（10）式－（11）式と（5）式から，各々ナッシュ均衡解利得およびパレート均衡解利得が求められる。

1.3　グループ規模と公共財の自発的拠出

公共財の自発的拠出に影響を与える要因として，プレイヤーの異質性や所得水準以外に，公共財拠出を担うグループ規模をあげることができる。当然大きなグループになると，潜在的に多くのプレイヤーが負担を広く引き受ける状況が生まれてくる。それに伴い，公共財の拠出負担から離脱するインセンティブが働くプレイヤーも多くなると予想される。フリーライド問題である。無限にプレイヤーが存在する場合，公共財の拠出が不可能になるかもしれない。

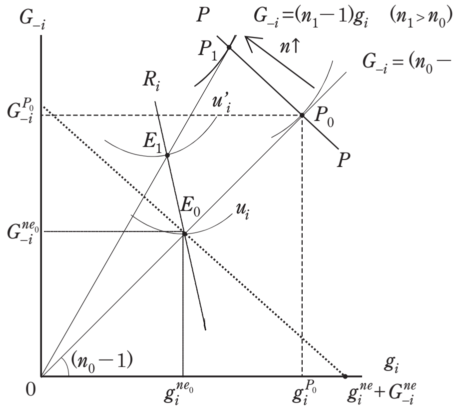

図 1　グループ規模と公共財拠出量

ここでグループ規模の変化が，プレイヤー一人ひとりの負担する公共財拠出量およびグループ全体の拠出量に及ぼす影響を，静学モデルの枠組みで考察していく。先程と同様，n 人同質プレイヤーを仮定し，対称均衡を分析対象とする。

図 1 は，横軸にプレイヤー i の拠出量 g_i，縦軸にプレイヤー i 以外からの拠出量 G_{-i} をとっている。自発的公共財の拠出量 g_i^{ne} およびパレート効率的な拠出量 g_i^P を示すため，図中には，プレイヤー i の無差別曲線（u_i）と最適反応曲線（R_i）を描いた。また無差別曲線の傾きは,

$$\frac{dG_{-i}}{dg_i} = -\frac{MRS_{x_i g_i} - 1}{MRS_{x_i g_i}},\ \ i = 1,\ldots,n$$

で表される。

ナッシュ均衡解の下では，各プレイヤーは $MRS_{xi,gi} = 1$ を満たすようにその拠出量 g_i^{ne} を決定する。その場合，上式から無差別曲線の傾きは $(dG_{-i}/dg_i) = 0$ となり，傾きは水平となる。従って，他のプレイヤーの拠出量 G_{-i}^{ne} に対するプレイヤー i の拠出量 g_i^{ne} の最適反応曲線（R_i）は，そのナッシュ均衡点の軌跡として描き出される（図 1 ）。併せて最適反応関数は（4）式より $g_i^{ne} = \varphi_i\left(y_i, G_{-i}^{ne}\right) - G_{-i}^{ne}$（$i = 1,\ldots,n$）で表わされる。

またプレイヤー i の拠出量 g_i とそれ以外のプレイヤーの拠出量 G_{-i} には，$G_{-i}=(n-1)g_i$ が成立することから，ナッシュ均衡解におけるプレイヤー i の公共財拠出量 g_i^{ne} が決まる。図1にはその状況を描いている。グループ規模（n）が n_0 であれば，ナッシュ均衡解は図1の E_0 点となり，$\left(g_i^{ne_0}, G_{-i}^{ne_0}\right)$ の組み合わせで公共財が拠出される。また，公共財の総量は $G^{ne}=g_i^{ne}+G_{-i}^{ne}$ となる（この拠出量は点線・補助線の横軸切片で表わせる）。

さてグループ規模（n）が拡大すると，原点から伸びる半直線は反時計回りに上方シフトする。それに合わせて，ナッシュ均衡解は最適反応曲線上を移動しながら各プレイヤーの拠出量 g_i^{ne} を減少させ，公共財拠出総量 $G^{ne}=g_i^{ne}+G_{-i}^{ne}$ を増加させていくのが，図1から容易に読み取れる（図1：$E_0 \rightarrow E_1$）[6)]。

次にパレート効率的な公共財の拠出量については，同質プレイヤーの仮定より，MRS_{xigi}, $(i=1,\ldots,n)$ が同一であることから考える。ここで拠出量がパレート効率ならば，Samuelson 条件より，$MRS_{xigi}=\dfrac{1}{n},(i=1,\ldots,n)$ でなければならない。すなわち，Samuelson 条件が満たされれば，無差別曲線の傾きは $(dG_{-i}/dg_i)=n-1$ となる。従ってパレート効率的な公共財拠出量は，$G_{-i}=(n-1)g_i$ と無差別曲線との接点で決まる。例えば，グループ規模（n）が n_0 であれば，均衡点は図中 P_0 点となり，$\left(g_i^{P_0}, G_{-i}^{P_0}\right)$ の組み合わせで公共財のパレート効率な拠出量が決まる。またグループ規模の拡大は，P-P 曲線上を移動しながら各プレイヤーの拠出量 g_i^{P} を減少させつつ，公共財のパレート効率的総量 G^{P} を増加させる（図1：$P_0 \rightarrow P_1$）

最後に，グループ規模の変化に応じて，社会的に最適な拠出量とナッシュ均衡解の拠出量との乖離幅がどのような動きを示すかを考察する。直感的には最適反応曲線と P-P 曲線の形状で結果が異なると考えられる。

コブ・ダグラス効用関数に特定化した場合，ナッシュ均衡における公共財の拠出量 G^{ne} と，公共財の社会的にパレート効率拠出量 G^{P} の乖離の大きさは，

$$G^{P}-G^{ne}=(1-\alpha)ny_i-\frac{(1-\alpha)ny_i}{1+\alpha(n-1)} \tag{12}$$

であり，$n\rightarrow\infty$ の極限を考えると，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left((1-\alpha)ny_i-\frac{(1-\alpha)ny_i}{1+\alpha(n-1)}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha n(1-\alpha)(n-1)y_i}{1+\alpha(n-1)}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

ここでロピタルの定理を適用すれば，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{\alpha}(1-\alpha)(2n-1)}{\cancel{\alpha}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left((1-\alpha)(2n-1)\right)\rightarrow\infty\end{aligned} \tag{14}$$

となる。このことから *one-shot* ゲームにおいては，グループ規模（プレイヤ－数）が拡大するにつれ，その乖離幅も大きくなる。すなわち社会的に最適な公共財の拠出量からは遠ざかっていく。共通利益を持つ個人の集まりであるグループにおいて公共財は過少拠出され，さらに大規模グループにおいては，公共財の自発的な供給は，制度・強制あるいは選択的誘因なしには著しく困難であるという Olson モデルの命題を支持する結果となっている。

2. 繰り返しゲームにおける公共財の自発的拠出

グループのプレイヤー数が多くなると，当然公共財拠出の負担を，潜在的に広く多くのプレイヤーに引き受けさせることができる。それに伴い，公共財の自発的拠出から離脱しようとするインセンティブが，各プレイヤーに働くと予想される。従って，無限にプレイヤーが存在する場合，このインセンティブが強くなり，公共

財の自発的拠出モデルではパレート効率が不可能になると考えられる。ここでは，この予想が，無限繰り返しゲームの枠組みでも成立するかを見ていく。

2.1 無限繰り返しゲームと制裁の工夫

ゲームの構造を *one-shot* ゲームではなく，無限に繰り返されるゲームにすれば，公共財の自発的拠出モデルも協調からパレート効率的な公共財拠出水準が実現できると予想される。

繰り返しゲームにおいて各プレイヤーに協調維持を選択させるには，逸脱したプレイヤーに対して制裁措置をとることを戦略の中に組み入れることで実現される。その基本的な制裁として，*min-max* 行動があげられる。

この場合，プレイヤーの将来利得に対する割引因子 δ が十分に大きければ，すべてのプレイヤーにとって，*min-max* 利得より高い利得をもたらす行動の組みが，繰り返しゲームのナッシュ均衡として実現する。

しかし，*min-max* 行動を制裁として持つトリガー戦略が，サブゲーム完全均衡点となりうるかは信憑性が低い。プレイヤーが互いに協調を採っている状況下，あるプレイヤー i がそれから逸脱すれば，他のすべてのプレイヤーは，それ以降 *min-max* 行動をとり続け制裁に入る。当然，逸脱プレイヤー i は *min-max* 利得となるが，これは同時に制裁を課したプレイヤーすべての利得も減少することに繋がることから，一般的に *min-max* での制裁を選択しない方が，高い利得をうる可能性があり，*min-max* 制裁を無限回続けることは信憑性が薄いと思われる。また協調行動から離脱するプレイヤー i もこの制裁に信憑性を置かないと考えられる。すなわちサブゲーム完全均衡とはならない[7)]。

本稿では，トリガー戦略が，無限繰り返しゲームのナッシュ均衡となり，かつその部分ゲームすべてにおいてもナッシュ均衡（サブゲーム完全均衡）となるように，制裁利得を *one-shot* ゲームにおけるナッシュ均衡利得とする（Friedman（1971））。

2.2 無限繰り返しゲーム―クリティカル値とプレイヤーの割引因子―

既に *one-shot* ゲームにおける公共財の自発拠出モデルでは，公共財の最適な拠出量が実現することは見られなかった。しかしながら多くの場合，プレイヤーは *one-shot* ゲーム（静学モデル）のように一回限りの公共財拠出決定を行っているのではなく，繰り返しゲームという動学的なモデルの中で意思決定を行っている。そのことを踏まえ，Pecorino（1999），Itaya and Okamura（2003）は，標準的な公共財の自発的拠出モデルを無限繰り返しゲームの枠組みで分析した。

Pecorino（1999）はその中でグループ規模の影響を分析し，また Itaya and Okamura（2003）は推測的変動が繰り返しゲームの中でどのような性質を持つのかを検討した。彼らは，プレイヤーが多少とも将来にウェートを置く限り，割引因子 δ の上昇は推測的変動を増加させ，またその値は正となることを示した。同時にトリガー戦略をとるプレイヤーは，協調からの離脱によって失われる効用損失を大きくとらえ，協調するインセンティブが高まるとした（逸脱する魅力が小さくなる）。

本節では Pecorino（1999），Itaya and Okamura（2003）のモデルから無限繰り返しゲームの枠組みの中で公共財の自発的拠出の協調可能性をみていく。ここでプレイヤーは各期間の期首の行動を選択する際，それ以前のゲームの履歴を完全に観測できるという完全観測（モニタリング）を前提とする。従って，協調からの逸脱は必ず観測できる。また各プレイヤーの利得は，各段階のゲームから得られる利得の無限流列の現在価値である。u_i^C をプレイヤーが協調をとった時の利得，u_i^D を協調行動から逸脱したプレ

イヤーの利得，また u_i^{ne} を互いに非協調的行動をとった時の利得とする。この利得の大小関係は $(u_i^D > u_i^C > u_i^{ne})$ である。

まず各プレイヤーは協調をとり，プレイヤー全員の利得が u_i^C であったとする。仮に利得 u_i^D を目指したプレイヤーが協調行動から逸脱すれば，そのプレイヤーのその期の利得は u_i^D となるが，その他のプレイヤーは，それ以降，将来のすべての期間において，利得が u_i^{ne} となる対抗措置をとる（トリガー戦略）。従って各プレイヤーが，毎期，協調行動をとる必要条件は

$$u_i^D\left(y_i - g_i^D, g_i^D + G_{-i}^C\right) + \sum_{t=1}^{\infty}\delta^t u_i^{ne}\left(y_i - g_i^{ne}, g_i^{ne} + G_{-i}^{ne}\right) \leqq \sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u_i^C\left(y_i - g_i^C, g_i^C + G_{-i}^C\right) \tag{15}$$

であり，

$$u_i^D\left(y_i - g_i^D, g_i^D + G_{-i}^C\right) + \frac{\delta}{1-\delta}u_i^{ne}\left(y_i - g_i^{ne}, g_i^{ne} + G_{-i}^{ne}\right) \leqq \frac{1}{1-\delta}u_i^C\left(y_i - g_i^C, g_i^C + G_{-i}^C\right) \tag{16}$$

となる。δ^t は t 期における割引因子を示している（$0 < \delta^t < 1$）。上式の等式を満たす割引因子（δ）をクリティカル $\delta^{※}$ 値として定義する。トリガー戦略によって，$\delta \geq \delta^{※}$ であれば協調行動は維持されが，$\delta \leq \delta^{※}$ であれば協調は維持されない。また上式から，クリティカル $\delta^{※}$ 値は，

$$\delta^{※} = \frac{u_i^D - u_i^C}{u_i^D - u_i^{ne}}$$

として求められ，$u_i^D > u_i^C > u_i^{ne}$ なので，$0 < \delta^{※} < 1$ が成立する。また協調行動の維持可能性はこの $\delta^{※}$ 基準で検討される。$\delta^{※}$ が1より小さい値であれば，協調維持の可能性が生じる。従って，何らの要因でクリティカル値 $\delta^{※}$ が大きくなると，協調維持の困難性が高まることになる（逆にそれが小さくなる程，協調維持が容易になる）。以下，繰り返しゲームの枠組みにおける協調の維持可能性はこの割引因子 δ に着目しながら展開される。

2.3　コブ・ダグラス型効用関数―例解―

ゲームの構造を無限繰り返しゲームとして，協調維持の可能性とグループ規模との関係を考えていく。ここでもプレイヤーを同質とし，対称均衡を分析する。また前節同様，コブ・ダグラス型効用関数 $x_i^{\alpha}\left(g_i + G_{-i}\right)^{1-\alpha}$ を用いる。ここで協調解利得 u_i^C をパレート効率拠出量における利得 u^P とし，報復（制裁）利得 u_i^D をナッシュ均衡解利得 u_i^{ne} とする。

（10）式，（11）式及び（5）式から（17）式が，（8）式，（9）式及び（5）式から（19）式が得られる。また協調維持から逸脱するプレイヤーは，保有する初期所得をすべて私的消費財に配分（$x_i = y_i$），公共財拠出負担は行わない（$g_i^D = 0$）[8)]。その利得 u_i^D を（18）式で表わす。

$$u_i^P\left(y_i - g_i^P, g_i^P + G_{-i}^P\right) = \alpha^{\alpha}\left((1-\alpha)n\right)^{1-\alpha} y \quad \text{協調利得} \tag{17}$$

$$u_i^D\left(y_i - 0, G_{-i}^P\right) = \left((1-\alpha)(n-1)\right)^{1-\alpha} y \quad \text{逸脱利得} \tag{18}$$

$$u_i^{ne}\left(y_i - g_i^{ne}, g_i^{ne} + G_{-i}^{ne}\right) = \alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\frac{ny}{1-\alpha+\alpha n} \quad \text{報復利得} \tag{19}$$

また，協調維持の必要条件（16）式は，

$$\left[\left((1-\alpha)(n-1)\right)^{1-\alpha} y\right] + \frac{\delta}{1-\delta}\left[\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\frac{ny}{1-\alpha+\alpha n}\right] \leqq \frac{1}{1-\delta}\left[\alpha^{\alpha}\left((1-\alpha)n\right)^{1-\alpha} y\right] \tag{20}$$

となり，クリティカル値 $\delta^{※}(n)$ は，

$$\delta^{※}(n)=\frac{(1-\alpha+\alpha n)\left[(n-1)^{1-\alpha}-\alpha^{\alpha}n^{1-\alpha}\right]}{(1-\alpha+\alpha n)(n-1)^{1-\alpha}-\alpha^{\alpha}n} \quad (21)$$

として表わされる。従って，公共財拠出ゲームに参加するプレイヤーが，この値より大きな割引因子 δ をとれば，（協調行動の）パレート効率的な公共財拠出量（$G^{C}=G^{P}$）は，無限繰り返しゲームにおけるサブゲーム完全均衡として実現する。

2.4　グループ規模拡大，公共財の自発的拠出

Olson（1965）は，利己的な人が公共財の供給に貢献することはなく，大規模グループ程，公共財は自発的に拠出されないと主張した。すなわち公共財の自発的拠出ゲームは n 人－囚人のジレンマゲームの構造を持つことを示した。そのためグループ内のプレイヤーが多数であるケースや共通利益の実現に向けての強制もしくは他の特別な工夫がなければグループ利益の達成はないことを展開した。

Andreoni（1988）は，標準的な公共財の自発的モデルの場合，大きな経済（Large economies）では「ただ乗り」が支配的で，極限的には社会のほんの少数の者が公共財への拠出（寄付）を行い，平均的な公共財への拠出（寄付額）はゼロに収束する極限定理が働くとした。しかし，同時に Andreoni は，①アメリカでは85％以上の家計が慈善事業に寄付し，その総額は GNP の２％に上り，②個人の平均寄付額は４分位の最低位家計の70ドルから最高位家計の350ドルまでの範囲に渡る，③さらに政府による寄付は私的な寄付を５－28％しか減少させていない事実を踏まえ，標準理論モデルと実証に乖離が生じていることを主張した。その理由として従来のモデルが純利他的効用関数を想定しているからとし，整合的なモデル構築のため半利他的効用関数を提示した[9)]。彼はその枠組みの中で現実と公共財モデルの齟齬を解決しようと試みた。

さて本節では，前節の繰り返しゲームの枠組みのもと，グループ規模拡大が，公共財拠出に与える影響を分析する。

そのために（21）について，$n\to\infty$ とすれば，

$$\lim_{n\to\infty}\delta^{※}(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-\alpha+\alpha n)\left[(n-1)^{1-\alpha}-\alpha^{\alpha}n^{1-\alpha}\right]}{(1-\alpha+\alpha n)(n-1)^{1-\alpha}-\alpha^{\alpha}n}\right) \quad (22)$$

で表わされ，

$$\lim_{n\to\infty}\delta^{※}(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1-1/n}\right)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}}{1-\left(\frac{1}{\alpha+(1-\alpha)/n}\right)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}n^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\left(\frac{1}{1-1/n}\right)}\right) \quad (23)$$

従って，

$$\lim_{n\to\infty}\delta^{※}(n)=1-\alpha^{\alpha} \quad (24)$$

が得られる。

プレイヤーが多数存在する場合には，協調からの離脱インセンティブが働き，協調維持が不可能と予想された。しかし（24）式から分かるように，無限繰り返しゲームの下，長期的視野を有するプレイヤーがトリガー戦略に従えば，パレート効率で公共財を拠出する可能性の余地は生じうる。すなわち，グループ規模が無限に拡大しても，プレイヤーが将来に対して，$\delta^{※}$ より大きなウェイト（δ）を置いていれば，パレート効率量で公共財を拠出する協調行動は実現しうる。これは，大規模グループでは逸脱インセンティブが強まる反面，大規模グループでの協調利得の増大が，それを相殺することで説明される。

お　わ　り　に

基本モデル（静学モデル）では，自発的に拠出される公共財は，社会的に最適なパレート効率水準から乖離する（オルソンの公共財の過小供給）。しかし繰り返しゲームの枠組みでは，必ずしもその命題は成立せず，大規模グループにおいても社会的に最適な公共財の拠出量が自発的な行動で実現される可能性があることを提示した。Pecorino（1999），Itaya and Okamura（2003）をはじめとする繰り返しゲームモデルは，新たな展開の可能性を示している。

そのためモデルの幾つかの仮定を緩める必要がある。まず同質プレイヤーを想定している点である。所得の違い等，異質なプレイヤーにおける拠出行動を分析する必要がある。あるいは公共財の特徴や公共財の集計関数にも焦点を当てなければならない。また一般に相手の行動を完全にモニタリング（観測）できる状況では，十分に長期的な視野に立つプレイヤーであれば，効率的な公共財拠出は，サブゲーム完全均衡によって達成可能である。しかし実際にはお互いの行動を正確に観察することは容易ではない。このような不完全モニタリングの状況でも，長期的視野をもつプレイヤーが公共財の効率的拠出を達成できるかは重要なテーマである。

最後に本稿では，グループ（コミュニティ）への公共財拠出の協調維持がトリガー戦略で維持されるのをみたが，このような協調は必ずしも制裁（脅迫）を伴う戦略のみによって維持されるとは限らない。たとえば，社会的規範・倫理，道徳あるいはコミュニティへの帰属意識等によっても集合行為（協調維持）が実現される例は観察される（最も帰属意識等がいかにして構築されていくかもまた重要なテーマではある）。このような視点からも公共財の拠出モデルを分析する必要性がある。

注

1）公共財の自発的供給はいわば一種の寄付行為であり，ここでのナッシュ均衡は寄付均衡と呼んでもいい。

2）リンダール・メカニズム等，メカニズム・デザインの研究はこのような問題意識から発展してきた。

3）$\max_{x_i,G}\left(u_i\left(x_i,G_i\right) \mid s.t.\ x_i+G=y_i+G_{-i}\right)$ と換えることができる。この場合，各プレイヤーは自らの初期所得以外に他のプレイヤーによって拠出される公共財総量 G_{-i} も自らの所得として，最大化問題を解くと考える。

4）この条件の導出については省略。但し左辺は私的財で測った公共財供給の限界便益の和あるいは社会的な限界便益である。また右辺は私的財で測った公共財供給の限界費用である。

5）ナッシュ均衡では，社会的な限界便益が社会的な限界費用を上回ることがこの式より導ける。この場合は，すべてのプレイヤーに公共財の拠出量増加（私的財の消費を減少）を促すことで，すべてのプレイヤーの効用は上昇しうる。すなわち，公共財への拠出量の増加によってパレート改善の余地がある。

6）準線形効用関数 $u_i\left(x_i,G\right)=x_i+\dfrac{G^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ であれば，グル―プ規模 n の拡大は総拠出量は一定で個人拠出量のみ減少していく。

7）もちろん，この場合でも Fundenberg & Maskin（1986）の示した通り，制裁措置を工夫し設計し直すことで，繰り返しゲームのフォーク定理がサブゲーム完全均衡で成立する（完全フォーク定理）。

8）協調維持から逸脱プレイヤーの行動を次の最大化問題として表すこともできる。

$$\max_{x_i,g_i}\left(x_i^{\alpha}\left(g_i+G_{-i}^{P}\right)^{(1-\alpha)} \mid s.t.\ x_i+g_i=y_i+G_{-i}^{P}\right)$$

9）効用関数 $u_i\left(x,G_{-g}\right)$ を半純粋利他的効用関数と呼ぶ。ここで x は私的財消費量，g は個人の公共財の拠出量，G は公共財の総量である。ちなみに $u_i\left(x,G_{-}\right)$，$u_i\left(x,g\right)$ は各々純粋利他的効用関数，純粋利己的効用関数。

参　考　文　献

Anndreoni（1988），“Privately Provide Public Goods in a large Economy: The limits of Altrusism.” *Journal of Public Economics, 35: 57–73.*

Bergstrom, T.C, Blume, L., and Varian, H.R.（1986），“On the Private Provision of Public Goods,” *Journal of Public Economics, 29: 25–49.*

Friedman, J.M.（1971），“A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames,” *Review of Economic Studies, 38: 1–12.*

Fundenberg, and Maskin（1986），“The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with InComplete Information” *Econometrica.*

Itaya, J., and Okamura, M. (2003),"Conjectural Variations and Voluntary Public Good Provision in a Repeated Game Setting." *Journal of Public Economics Theory, 5: 51–66.*

Olson, M. (1965), *The Logic* of *Collective Action: Public Goods and the Theory of Groups,* (Harvard University Press) (マンサー＝オルソン著，依田博・森脇俊雅訳 (1983)『集合行為論―公共財と集団理論―』ミネルヴァ書房).

Pecorino, P. (1999), "The Effect of Group Size On Public Good Provision in a Repeated Game Setting," *Journal of Public Economics, 72: 121–134.*

Samuelson, P. (1954), "The Pure Theory of Public expenditure.," *Review of Economic Statistics, 36: 387–389.*