広島経済大学経済研究論集
第37巻第1号　2014年6月

サミュエルソンの2つの保存則を生成するフォン・ノイマン型経済成長モデルの一般化

三　村　文　武*

は　じ　め　に

1970年，サミュエルソン[1] は保存則を初めて理論経済学に明示的に導入し「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は一定である」という力学的エネルギー保存則との類似に注目し，すべての産出物がシステムの成長のための資本形成に供されるような新古典派的フォン・ノイマン型経済成長モデルにおいて2つの保存則を導出し，これより「総産出-資本（富）比は不変である」ことを示した。その後佐藤[2] はこのサミュエルソンのモデルにおいて，ネーターの定理[3, 4] を用いて，特に（簡単のため）2種類の異なる資本材 $K=(K^1(t), K^2(t))$ が1次同次の変換関数によってその準資本形成 $\dot{K}=(\dot{K}^1, \dot{K}^2)=(dK^1/dt, dK^2/dt)$ と関係づけられているとき，その変換関数が強凹型であるという条件の下で，これら2つは大域的に作用する唯一の保存則であることを示した。続いて片岡[5] は佐藤の結果が強凹型の条件を弱めた凹型の条件下でも成立することを示した。

我々はこのサミュエルソンの新古典派的フォン・ノイマン型経済成長モデルにおける2つの保存則を生成するような最適制御問題を考察し，最大化を図る積分の被積分関数（効用関数）$U(\dot{K}, K, t)=U(\dot{K}^1, \cdots, \dot{K}^n, K^1, \cdots, K^n)$ の最も一般的な形を決定した[6]。その形は $n=2$ の場合はトータル時間微分 $U=\dot{G}(K, t)=dG(K, t)/dt$ である（サミュエルソンの用いた効用関数は $\dot{K}^1$ 即ち $G=K^1$）。$n\geq 3$ の場合は $U=\dot{f}(K, t)+g(\dot{K}, K)$ の形であり，g が $\dot{K}$ と K に関して r 次同次と仮定すれば，同様に $r\neq 0$ のときは $g=\dot{h}(K)$ となり，U はトータル時間微分 $U=\dot{G}(K, t)$ $(G=f+h)$ である。しかし，$r=0$ のときは g は必ずしもトータル時間微分とは限らない。

割り引き率 μ（μ: const.）を持つ効用関数 U が1次の同次関数 $G=G(K)$ のトータル時間微分を用いて $U=e^{-\mu t}\dot{G}$ と表されるときの一般化されたサミュエルソンの保存則については注の論文[7, 8] を参照されたい。尚，片岡[9]（片岡・橋本[10]）は，$p_1(t)$ と $p_2(t)$ をそれぞれ $\dot{K}^1$ と $\dot{K}^2$ の供給価格として，割引率 ρ（ρ: const.）を持つ効用関数 $U=e^{-\rho t}(p_1\dot{K}^1+p_2\dot{K}^2)$ が保存則を生成するとき，ネーターの定理を用いて $p_1=p_1^0e^{\delta t}$，$p_2=p_2^0e^{\delta t}$（p_1^0, p_2^0, δ: const.）であることを示し，その保存則を求めている。保存則を生成するその効用関数 U は $G=p_1^0K^1+p_2^0K^2$ のトータル時間微分を用いて $U=e^{-\mu t}\dot{G}$ $(\mu=\rho-\delta)$ と表せることに注目したい。

本稿では n 個の $K=(K^1, \cdots, K^n)$ と $\dot{K}=(\dot{K}^1, \cdots, \dot{K}^n)$ に関する1次同次の変換関数 $F(K, \dot{K})$ を s 次同次に一般化して，注の論文[6] で求めた効用関数の一般形を再考察する。

本稿を通して各項の繰り返し現れる同じ添字については総和をとるという和の規約を採用し，関数は必要な階まで微分可能とする。

* 広島経済大学経済学部教授
（Received, March 4, 2014）

サミュエルソンの成長モデルの一般化

サミュエルソンのフォン・ノイマン型経済成長モデルを一般化して，n 個の異なる資本材 $K=(K^1,\cdots,K^n)$ が n 個の準資本形成 $\dot{K}=(\dot{K}^1,\cdots,\dot{K}^n)$ と関係づけられる拘束条件

(1)　$$F=F(\dot{K},K)=0$$

の下での積分

(2)　$$\int_0^T U(\dot{K},K,t)dt$$

の最大化問題を考察する。ここに $F(\dot{K},K)$ は $\dot{K}$ と K に関して s 次の同次関数，即ち

(3)　$$\dot{K}^i\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}+K^i\frac{\partial F}{\partial K^i}=sF$$

を満たしているとする。この最大化問題のラグランジアン L は λ をラグランジュ乗数として

$$\begin{aligned}L&=L(\dot{\lambda},\dot{K},\lambda,K,t)\\&=U(\dot{K},K,t)+\lambda F(\dot{K},K)\end{aligned}$$

であり，そのオイラー・ラグランジュ方程式系は $F=0$ と n 個の式

(4)　$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{K}^i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}\right)\\&\qquad-\left(\frac{\partial U}{\partial K^i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial K^i}\right)=0\end{aligned}$$

$(i=1,\cdots,n)$ から成る。

ここでサミュエルソンの2つの保存則 $\dot{\Omega}_1=0$ と $\dot{\Omega}_2=0$，即ち

(5)　$$\Omega_1=\lambda K^i\frac{\partial F}{\partial K^i}=\text{const.}$$

(6)　$$\Omega_2=\lambda K^i\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}=\text{const.}$$

がオイラー・ラグランジュ方程式系(4)の定める最適経路上に存在するとする。このとき，(4)を

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}\right)=\lambda\frac{\partial F}{\partial K^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{K}^i}\right)+\frac{\partial U}{\partial K^i}$$

と変形して，$\dot{\Omega}_1$ には(3)を用いて Ω_1 を書き換えた後に，また $\dot{\Omega}_2$ には直接代入するとそれぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1&=\frac{d}{dt}\left(s\lambda F-\lambda\dot{K}^i\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}\right)\\&=s\dot{\lambda}F+s\lambda\dot{F}\\&\qquad-\lambda\ddot{K}^i\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}-\dot{K}^i\frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}\right)\\&=s\dot{\lambda}F+s\lambda\dot{F}-\lambda\left(\ddot{K}^i\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}+\dot{K}^i\frac{\partial F}{\partial K^i}\right)\\&\qquad+\dot{K}^i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{K}^i}\right)-\frac{\partial U}{\partial K^i}\right)\\&=s\dot{\lambda}F+(s-1)\lambda\dot{F}\\&\qquad+\dot{K}^i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{K}^i}\right)-\frac{\partial U}{\partial K^i}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_2&=\lambda\dot{K}^i\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}+K^i\frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}\right)\\&=\lambda\left(\dot{K}^i\frac{\partial F}{\partial \dot{K}^i}+K^i\frac{\partial F}{\partial K^i}\right)\\&\qquad-K^i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{K}^i}\right)-\frac{\partial U}{\partial K^i}\right)\\&=s\lambda F-K^i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{K}^i}\right)-\frac{\partial U}{\partial K^i}\right)\end{aligned}$$

従って最適経路上で $F=0$，$\dot{F}=0$，$\dot{\Omega}_1=0$，$\dot{\Omega}_2=0$ であるから，(5)，(6)より効用関数 U は

$$\dot{K}^i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{K}^i}\right)-\frac{\partial U}{\partial K^i}\right)=0$$

$$K^i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{K}^i}\right)-\frac{\partial U}{\partial K^i}\right)=0$$

を満たす。即ち，最適経路上で

(7)　$$\begin{aligned}&\dot{K}^i\left(\ddot{K}^j\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{K}^i\partial \dot{K}^j}+\dot{K}^j\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{K}^i\partial K^j}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{K}^i\partial t}-\frac{\partial U}{\partial K^i}\right)=0\end{aligned}$$

$$K^i\left(\ddot{K}^j\frac{\partial^2 U}{\partial\dot{K}^i\partial\dot{K}^j}+\dot{K}^j\frac{\partial^2 U}{\partial\dot{K}^i\partial K^j}+\frac{\partial^2 U}{\partial\dot{K}^i\partial t}-\frac{\partial U}{\partial K^i}\right)=0 \tag{8}$$

を満たす。

(7)を満たす U が存在する，即ち U が任意の K^i について(7)式を満たすためには $\ddot{K}^j$ の係数（$\dot{K}, K, t$ の関数）は零でなければならないので

$$\dot{K}^i\frac{\partial^2 U}{\partial\dot{K}^i\partial\dot{K}^j}=0$$

即ち

$$\frac{\partial}{\partial\dot{K}^j}\left(U-\dot{K}^i\frac{\partial U}{\partial\dot{K}^i}\right)=0$$

従って

$$U-\dot{K}^i\frac{\partial U}{\partial\dot{K}^i}=\xi(K,t) \tag{9}$$

とおける。これの $\dot{K}^j$ と t についての微分

$$\dot{K}^i\frac{\partial^2 U}{\partial\dot{K}^i\partial K^j}=\frac{\partial U}{\partial K^j}-\frac{\partial\xi}{\partial K^j}$$

$$\dot{K}^i\frac{\partial^2 U}{\partial\dot{K}^i\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial\xi}{\partial t}$$

を(7)に代入すると

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\dot{K}^i\frac{\partial\xi}{\partial K^i}+\frac{\partial\xi}{\partial t}$$

が得れれる。これを関数に陽に含まれる変数 t について積分すると

$$U=\dot{K}^i\int\frac{\partial\xi}{\partial K^i}dt+\xi(K,t)+g(\dot{K},K) \tag{10}$$

となる。ξ に陽に含まれる t についての積分を

$$f(K,t)=\int\xi(K,t)dt$$

とおくと

$$\begin{aligned}\dot{f}&=\dot{K}^i\frac{\partial f}{\partial K^i}+\frac{\partial f}{\partial t}\\&=\dot{K}^i\int\frac{\partial\xi}{\partial K^i}dt+\xi\end{aligned} \tag{11}$$

より，U は

$$U=\dot{f}(K,t)+g(\dot{K},K) \tag{12}$$

となる。ここに $\dot{f}(K,t)$ は次のオイラー・ラグランジュ方程式系を満たす（このような $\dot{K}$ を含まない K と t の関数 $f(K,t)$ のトータル時間微分はそのオイラー・ラグランジュ方程式系を常に満たすことが知られている[11, 12] が，(11)の最初の右辺を次式に代入してもこのことが示せる）：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{f}}{\partial\dot{K}^i}\right)-\frac{\partial\dot{f}}{\partial K^i}\\&=\ddot{K}^j\frac{\partial^2\dot{f}}{\partial\dot{K}^i\partial\dot{K}^j}+\dot{K}^j\frac{\partial^2\dot{f}}{\partial\dot{K}^i\partial K^j}+\frac{\partial^2\dot{f}}{\partial\dot{K}^i\partial t}-\frac{\partial\dot{f}}{\partial K^i}=0\end{aligned} \tag{13}$$

従って U の中の項 $\dot{f}$ は(7)を満たす。(9)，(11)，(12)より

$$\begin{aligned}\dot{K}^i\frac{\partial g}{\partial\dot{K}^i}&=\dot{K}^i\frac{\partial}{\partial\dot{K}^i}(U-\dot{f})\\&=\dot{K}^i\frac{\partial U}{\partial\dot{K}^i}-\dot{K}^i\int\frac{\partial\xi}{\partial K^i}dt\\&=U-\xi-\dot{K}^i\int\frac{\partial\xi}{\partial K^i}dt\end{aligned}$$

従って(10)より $g(\dot{K},K)$ は $\dot{K}$ に関して１次同次，即ち

$$\dot{K}^i\frac{\partial g}{\partial\dot{K}^i}=g \tag{14}$$

を満たす。この同次性より g は(7)を満たす。実際 g は t を陽に含まないので

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\dot{K}^i\partial t}=0$$

これと(14)の $\dot{K}^j$ と K^j についての微分

$$\dot{K}^i \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{K}^i \partial \dot{K}^j} = 0$$
$$\dot{K}^i \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{K}^i \partial K^j} = \frac{\partial g}{\partial K^j}$$

より直ちに(7)を満たすことが判る。

次に(12)の U を(8)に代入すると(13)より U の中の項 $\dot{f}$ は(8)を満たす。g については $\ddot{K}^j$ の係数は零：

$$K^i \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{K}^i \partial \dot{K}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{K}^j}\left(K^i \frac{\partial g}{\partial \dot{K}^i}\right) = 0$$

である。従って

$$K^i \frac{\partial g}{\partial \dot{K}^i} = \varphi(K) \tag{15}$$

とおいて，その K^j 関する微分：

$$K^i \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{K}^i \partial K^j} = \frac{\partial \varphi}{\partial K^j} - \frac{\partial g}{\partial \dot{K}^j}$$

より，(8)は

$$K^i\left(\dot{K}^j \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{K}^i \partial K^j} - \frac{\partial g}{\partial K^i}\right)$$
$$= \dot{K}^j\left(\frac{\partial \varphi}{\partial K^j} - \frac{\partial g}{\partial \dot{K}^j}\right) - K^j \frac{\partial g}{\partial K^j} = 0$$

となる。即ち(14)を考慮して

$$\dot{K}^i \frac{\partial \varphi}{\partial K^i} - K^i \frac{\partial g}{\partial K^i} = g \tag{16}$$

ここで U の中の項 g の満たすべき式(14)，(15)，(16)より g の形を決定すために次の新たな変数を導入する：

$$Q^1 = \frac{\dot{K}^1}{K^1}$$
$$Q^\alpha = \frac{K^1 \dot{K}^\alpha - K^\alpha \dot{K}^1}{(K^1)^2}$$
$$\equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{K^\alpha}{K^1}\right) \quad (\alpha \geq 2)$$

以下，α を $i=1,\cdots,n$ と異なる番号を走る添字 $\alpha = 2,\cdots,n$ $(\alpha \neq 1)$ として用いる。また関数 $G(\dot{K}, K)$ の変数 $\dot{K}$ のかわりに新たな変数 Q を用いた関数を次のように表す：

$$G = G(\dot{K}, K) = \bar{G}(Q; K) = \bar{G}$$

このとき，旧と新の変数に関する微分の間には次の関係式が成立する：

$$K^i \frac{\partial G}{\partial \dot{K}^i} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial Q^1}$$
$$\dot{K}^i \frac{\partial G}{\partial \dot{K}^i} = Q^i \frac{\partial \bar{G}}{\partial Q^i}$$
$$K^i \frac{\partial G}{\partial K^i} = -Q^i \frac{\partial \bar{G}}{\partial Q^i} + K^i \frac{\partial \bar{G}}{\partial K^i}$$

これらの関係式は以下の計算に用いられる。

先ず(14)は

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial Q^1} = K^i \frac{\partial g}{\partial \dot{K}^i} = \varphi(K)$$

となり $\bar{g}$ は

$$\bar{g} = \varphi(K) Q^1 + \bar{\Psi}(Q^2, \cdots, Q^n; K) \tag{17}$$

とおける。これを(14)から得られる式：

$$Q^i \frac{\partial \bar{g}}{\partial Q^i} = \dot{K}^i \frac{\partial g}{\partial \dot{K}^i} = g$$

に代入すると $\dot{K}$ に関する g の同次性は Q^α $(\alpha = 2,\cdots,n)$ に関する $\bar{\Psi}$ の同次性：

$$Q^\alpha \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial Q^\alpha} = \bar{\Psi} \tag{18}$$

に変換される。次に(17)の $\bar{g}$ を(16)の中の項 $K^i \partial g / \partial K^i$ を新たな変数を用いて書き換えて代入すると

$$K^i \frac{\partial g}{\partial K^i} = -Q^i \frac{\partial \bar{g}}{\partial Q^i} + K^i \frac{\partial \bar{g}}{\partial K^i}$$
$$= -\varphi Q^1 - Q^\alpha \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial Q^\alpha}$$
$$+ Q^1 K^i \frac{\partial \varphi}{\partial K^i} + K^i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial K^i}$$

となる。これは(17)，(18)より

$$\varphi Q^1 + Q^\alpha \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial Q^\alpha} = g$$

であるから

$$K^i \frac{\partial g}{\partial K^i} = -\bar{g} + Q^1 K^i \frac{\partial \varphi}{\partial K^i} + K^i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial K^i}$$

となる。従って $Q^1 K^1 = \dot{K}^1$，$\dot{K}^\alpha - Q^1 K^\alpha = K^1 Q^\alpha$ より(16)の左辺は

$$\dot{K}^i \frac{\partial \varphi}{\partial K^i} - K^i \frac{\partial g}{\partial K^i}$$
$$= \bar{g} + K^1 Q^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial K^\alpha} - K^i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial K^i}$$

となり

(19) $$K^1 Q^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial K^\alpha} = K^i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial K^i}$$

が得られる。

ここで(18)，(19)を満たす φ と $\bar{\Psi}$ を決定するために次の２つの場合を考察する。

(i)　２個の資本材の場合：$\bar{\Psi}(Q^2; K)$ は(18)より Q^2 に関して１次同次であるから

$$\bar{\Psi}(Q^2; K) = \bar{\Psi}(1; K) Q^2 \equiv \psi(K) Q^2$$

と書き換えて $Q^1 = \dot{K}^1 / K^1$ と $Q^2 = (K^1 \dot{K}^2 - K^2 \dot{K}^1) / (K^1)^2$ を(17)の $\bar{g}$ $(n=2)$ に代入すると

$$\bar{g} = \varphi Q^1 + \psi Q^2$$
$$= \frac{K^1 \varphi - K^2 \psi}{(K^1)^2} \dot{K}^1 + \frac{\psi}{K^1} \dot{K}^2$$

となり，また(19) $(i=1,2; \alpha=2)$ に代入すると

$$K^1 Q^2 \frac{\partial \varphi}{\partial K^2} = Q^2 \left(K^1 \frac{\partial \psi}{\partial K^1} + K^2 \frac{\partial \psi}{\partial K^2} \right)$$

即ち

$$\frac{\partial \varphi}{\partial K^2} = K^1 \frac{\partial \psi}{\partial K^1} + K^2 \frac{\partial \psi}{\partial K^2}$$

となる。これは更に

$$\frac{\partial}{\partial K^2} \left(\frac{K^1 \varphi - K^2 \psi}{(K^1)^2} \right) = \frac{\partial}{\partial K^1} \left(\frac{\psi}{K^1} \right)$$

と書き換えられ，これより

$$\frac{K^1 \varphi - K^2 \psi}{(K^1)^2} = \frac{\partial h}{\partial K^1}$$
$$\frac{\psi}{K^1} = \frac{\partial h}{\partial K^2}$$

を満たす関数 $h(K^1, K^2)$ が存在し，$\bar{g} = g$ はトータル時間微分

$$g = \dot{K}^1 \frac{\partial h}{\partial K^1} + \dot{K}^2 \frac{\partial h}{\partial K^2} = \dot{h}(K^1, K^2)$$

となる。従って(12)の U は $G = f + h$ のトータル時間微分 $U = \dot{G}$ である。

(ii)　３個以上の資本材の場合：この場合は $g(\dot{K}, K)$ が $\dot{K}$ と K に関して r 次同次（従って，(14)より g は $\dot{K}$ に関して１次同次であるから，K に関しては $r-1$ 次同次である），即ち

$$\dot{K}^i \frac{\partial g}{\partial \dot{K}^i} + K^i \frac{\partial g}{\partial K^i} = rg$$

を満たしていると仮定してその形を決定する。

$r \neq 0$ のときは(16)より $rg = \dot{K}^i \partial \varphi / \partial K^i$ となり g はトータル時間微分 $g = \dot{h}(h = \varphi / r)$ であり，従って同様に(12)の U は $G = f + h$ のトータル時間微分 $U = \dot{G}$ である。

$r = 0$ のとき(16)は $\dot{K}^i \partial \varphi / \partial K^i = 0$ となり，これが任意の K^i について成立するためには

(20) $$\frac{\partial \varphi}{\partial K^i} = 0$$

従って φ は定数（$\varphi = c$: const.）となり(17)の中の項 φQ^1 はトータル時間微分

$$\varphi Q^1 = c \frac{\dot{K}^1}{K^1} = \frac{d(c \log K^1)}{dt}$$

で，これと f を併せて U の中の項 $\dot{f} + \varphi Q^1$ は $G = f + c \log K^1$ のトータル時間微分，即ち $\dot{f} + \varphi Q^1 = \dot{G}$ である。また(20)より(19)は $K^i \partial \bar{\Psi} / \partial K^i = 0$ となり $\bar{\Psi}(Q^2, \cdots, Q^n; K)$ は K に

関して零次同次である。ここで $\bar{\Psi}$ を

$$\begin{aligned}&\bar{\Psi}(Q^2,\cdots,Q^n;K^1,\cdots,K^n)\\&=\bar{\Psi}\left(Q^2,\cdots,Q^n;1,\frac{K^2}{K^1},\cdots,\frac{K^n}{K^1}\right)\\&\equiv\bar{\Xi}\left(Q^2,\cdots,Q^n;\frac{K^2}{K^1},\cdots,\frac{K^n}{K^1}\right)\end{aligned}$$

と書き換え，$R^\alpha=K^\alpha/K^1$（従って $Q^\alpha=\dot{R}^\alpha$; $\alpha=2,\cdots,n$）とおいて次の定理が得られる：

定理　サミュエルソンのフォン・ノイマン型経済成長モデルを一般化し，n 個の異なる資本材 $K=(K^1,\cdots,K^n)$ とその n 個の準資本形成 $\dot{K}=(\dot{K}^1,\cdots,\dot{K}^n)$ とが $\dot{K}$ と K に関する s 次同次の変換関数 $F(\dot{K},K)$ によって関係づけられている（拘束条件(1)）とする。このとき，拘束条件(1)の下での効用関数 $U=U(\dot{K},K,t)$ の積分(2)の最大化問題における最適経路上に，サミュエルソンの2つの保存則 $\Omega_1=\lambda K^i\partial F/\partial K^i=\text{const.}$ と $\Omega_2=\lambda K^i\partial F/\partial\dot{K}^i=\text{const.}$ が存在するような最も一般的効用関数 U は次の形に定まる：

(i)　2個の資本材の場合 U は $G(K,t)$ のトータル時間微分 $U=\dot{G}(K,t)$ の形である。

(ii)　3個以上の資本材の場合 U はトータル時間微分との和 $U=\dot{f}(K,t)+g(\dot{K},K)$ の形であり，$g(\dot{K},K)$ が $\dot{K}$ と K に関して r 次同次と仮定すれば，同様に $r\neq0$ ときは $g=\dot{h}(K)$ となり U はトータル時間微分 $U=\dot{G}(K,t)$ $(G=f+h)$ の形である。$r=0$ のときはトータル時間微分と次の関数 Ξ：

$$\Xi=\Xi(\dot{R}^2,\cdots,\dot{R}^n;R^2,\cdots,R^n)$$

との和 $U=\dot{G}(K,t)+\Xi$ の形である。ここに Ξ は $\dot{R}^\alpha(R^\alpha=K^\alpha/K^1;\alpha=2,\cdots,n)$ に関して1次の同次関数である。

注意　サミュエルソンのモデルにおける2つの保存則は，積分

$$\int_0^T \dot{K}^1dt$$

の最大化問題より導かれている。そこでの効用関数 U は K^1 のトータル時間微分 $U=\dot{K}^1$ である。サミュエルソンの2つの保存則を生成するような，割引率 μ（μ: const.）を持つ更に一般的な効用関数 U は，定理よりたとえば

$$G=e^{-\mu t}c_iK^i\quad(c_i:\text{const.};i=1,\cdots,n)$$

のトータル時間微分 $U=\dot{G}$ として見出すことができる。即ち $\dot{K}$ と K に関する s 次同次の変換関数による拘束条件(1)の下での

$$\int_0^T e^{-\mu t}c_i(\dot{K}^i-\mu K^i)dt$$

の最大化問題の最適経路上にサミュエルソンの2つの保存則 $\Omega_1=\lambda K^i\partial F/\partial K^i=\text{const.}$ と $\Omega_2=\lambda K^i\partial F/\partial\dot{K}^i=\text{const.}$ が存在する。

注

1)　P. A. Samuelson, Law of conservation of the capital-output ratio, Proc. Nat. Acad. Sci., Appl. Math. Sci. **67**(1970), pp. 1477–1479.

2)　R. Sato, Theory of technical change and economic invariance: Application of Lie groups, Academic Press, New York(1981).

3)　E. Noether, Invariante Variations probleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math-Phys. Kl. II **1918**(1918), pp. 235–257.

4)　E. Bessel-Hagen, Über die Erhaltungssätze der Electrodynamik, Math. Ann. **84**(1921), pp. 258–276.

5)　片岡晴雄，フォン・ノイマンモデルにおける保存則について，季刊理論経済学 **35**(1984), pp. 277–282.

6)　F. Mimura, F. Fujiwara and T. Nôno, An equivalent class of utility functions in a von Neumann growth models, Tensor, N. S. **57**(1996), pp. 318–324.

7)　F. Fujiwara, F. Mimura and T. Nôno, New derivation of conservation laws for maximizing problem under constraints, Sci. Math. Japon. **55**(2002), pp. 383–392; e5, pp. 371–380.

8)　三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその新古典派的経済成長理論への応用，広島経済大学経済論集

33(2010), pp. 17–27.
9) 片岡晴雄，フォン・ノイマンモデルにおける新しい保存則について，明星大学経済学研究紀要 **21**(1989), pp. 1–8.
10) H. Kataoka and H. Hashimoto, New conservation laws in von Neumann model, J. Math. Econom. **24**(1995), pp. 271–280.
11) D. G. B. Edelen, Nonlocal variations and local invariance of fields, American Elsevier, New York (1969).
12) E. L. Hill, Hamilton's principle and the conservation theorem of mathematical physics, Rev. Modern Phys. **23**(1951), pp. 253–260.