広島経済大学経済研究論集
第34巻第2号　2011年9月

最適制御問題における保存則の新しい導出法とその Open-loop ナッシュ戦略への応用

三村　文武*・藤原富美代**・濃野　隆之***

は　じ　め　に

1970年，サミュエルソン[1] は保存則を初めて理論経済学に明示的に導入し「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は一定である」という力学的エネルギー保存則との類似に注目し，すべての産出物がシステムの成長のための資本形成に供されるような新古典派的フォン・ノイマン型経済成長モデルにおいて「総産出-総資本比は一定である」という保存則を導出した。又，濃野[2] はリーの理論[3] の理論経済学への応用を提唱し，その例証として生産関数のリー変換群の下での対称性（不変性）に基づいて，中立型技術変化の完全なリストを完成させた。

古典力学においては，リー変換群の下での作用積分の対称性（不変性）に基づくネータの定理[4] および発散項を伴うその一般化[5] は，ラグランジュ（又はハミルトン）構造から保存則を発見する上で重要な役割を果たしてきた。一方，カビグリア[6, 7] は新たな変数を付加した高次元の空間での変分原理を利用して，ラグランジュ（又はハミルトン）構造を用いない保存則の新しい導出法を見出した。その後，三村-濃野[8] はネーターよりもより一般的であるこのカビグリアの手法を更に考察・発展させ，与えられた力学系の保存則を導出する効果的な手法として確立し，動力学および経済動学の種々のモデルにおける保存則の導出とそれらのモデルの動学的性質の解明に応用した。我々は前稿でその手法を特に新古典派的経済成長理論への応用[9] および枯渇性資源を含む最適資産蓄積問題への応用[10] について紹介した。続く本稿では Open-loop ナッシュ戦略への応用[11] について，公共財の自発的供給の問題の分析に用いられたフェルシュトマン-ニッツアンのモデル[12] を一般化して考察する。

本稿を通して関数は必要な階まで微分可能とする。次章1でのみ各項の繰り返し現れる同じ添字については総和をとるという和の規約を採用し，2章以降では総和をとるときのみ記号$\sum$を用いて表す。

1.　保存則導出の新しい手法

前稿と同様に，源となる保存量の構成法のレビューから始める。変数 $q=(q^{\alpha}(t))$，$\dot{q}=(\dot{q}^{\alpha}(t))=(dq^{\alpha}/dt)$，$\ddot{q}=(\ddot{q}^{\alpha}(t))=(d^2q^{\alpha}/dt^2)$ $(\alpha=1, \cdots, \ell)$ に関する2階の微分方程式系

$$(1.1) \qquad F^{\alpha}(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)=0$$

の解上で

$$(1.2) \qquad \frac{d\Omega(\dot{q}, q, t)}{dt}=0$$

(d/dt は t についてのトータル微分）を満たすΩを(1.1)の保存量，(1.2)を保存則と呼ぶ。(1.1)がオイラー-ラグランジュ方程式系（E-L 方程式系）であることを仮定しない注8）の論文における保存量の構成法を，前稿と同様に2階の微分方程式系(1.1)が $L(\dot{q}, q, t)$ をラグランジアン

* 広島経済大学経済学部教授
** 北九州市立大学国際環境工学部講師
*** 福岡教育大学名誉教授
(Received, June 14, 2011)

とする E-L 方程式系

$$(1.3)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=\ddot{q}^\beta W_{\alpha\beta}+\dot{q}^\beta\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial q^\beta}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0$$

$(W_{\alpha\beta}=\partial^2 L/\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta)$ であるとして考察する。先ず次の定理を挙げる[13]：

定理1．グランジアン $L(\dot{q},q,t)$ に対して，関数 $\xi^\alpha_\mu(t,q,\dot{q})$ $(\alpha=1,\cdots,\ell;\ \mu=1,2)$ が E-L 方程式系(1.3)の解上で

(1.4)

$$W_{\alpha\beta}\frac{d^2\xi^\beta_\mu}{dt^2}+\left(\frac{dW_{\alpha\beta}}{dt}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial q^\beta}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial q^\alpha}\right)\frac{d\xi^\beta_\mu}{dt}+\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial q^\beta}\right)-\frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\right)\xi^\beta_\mu=0$$

を満たすとする。このとき E-L 方程式系(1.3)の保存量が次のように構成される：

$$(1.5)\qquad \Omega=W_{\alpha\beta}\left(\xi^\alpha_1\frac{d\xi^\beta_2}{dt}-\xi^\beta_2\frac{d\xi^\alpha_1}{dt}\right)+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial q^\beta}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial q^\alpha}\right)\xi^\alpha_1\xi^\beta_2$$

この定理1を時間区間 $[0,\ T]$ $(T<\infty)$ 又は $[0,\ T)$ $(T=\infty)$ における積分

$$(1.6)\qquad \int_0^T e^{-\rho t}U(\dot{q},q)dt \qquad (\rho:\text{const.})$$

の拘束条件

$$(1.7)\qquad F^a=F^a(\dot{q},q)=0 \quad (a=1,\cdots,m)$$

の下での極値問題に適用する。但し $q=(q^i(t))$，$\dot{q}=(\dot{q}^i(t))$ $(i=1,\cdots,n)$ とする。この極値問題におけるラグランジアンは，$\lambda=(\lambda_a(t))$ をラグランジュ乗数として

$$L(\dot{\lambda},\dot{q},\lambda,q,t)=e^{-\rho t}U(\dot{q},q)+\lambda_a F^a(\dot{q},q)$$

で与えられる。ここで $\lambda_a=q^{n+a}$，即ち $(q^\alpha)=(q^i,\lambda_a)$ $(\alpha=1,\cdots,\ell=n+m)$ と置くと，E-L 方程式系(1.3)は $n+1\leq\alpha\leq n+m$ のとき拘束条件(1.7)，$1\leq\alpha\leq n$ のとき

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i}+\lambda_a\frac{\partial F^a}{\partial \dot{q}^i}\right)-\left(e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial q^i}+\lambda_a\frac{\partial F^a}{\partial q^i}\right)=0$$

となる。この極値問題から生成される E-L 方程式系の保存量は次のように構成される[14]：

定理2．積分(1.6)の拘束条件(1.7)の下での極値問題において，最適経路上，即ち極値問題より生成される E-L 方程式系の解上で

$$(1.8)\qquad \frac{\partial F^a}{\partial \dot{q}^i}\frac{d\xi^i}{dt}+\frac{\partial F^a}{\partial q^i}\xi^i=0$$

$$(1.9)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\frac{d\xi^j}{dt}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\xi^j+\frac{\partial F^a}{\partial \dot{q}^i}\eta_a\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}\frac{d\xi^j}{dt}+\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^j}\xi^j+\frac{\partial F^a}{\partial q^i}\eta_a\right)=0$$

を満たす解の組 $\xi^i_\mu(\dot{\lambda},\dot{q},\lambda,q,t)$ と $\eta^\mu_a(\dot{\lambda},\dot{q},\lambda,q,t)$ $(a=1,\cdots,m;\ i=1,\cdots,n;\ \mu=1,2)$ により，次の保存量が構成される：

(1.10)

$$\Omega=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\left(\xi^i_1\frac{d\xi^j_2}{dt}-\xi^j_2\frac{d\xi^i_1}{dt}\right)+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}(\xi^i_1\xi^j_2-\xi^i_2\xi^j_1)+\frac{\partial F^a}{\partial \dot{q}^i}(\xi^i_1\eta^2_a-\xi^i_2\eta^1_a)$$

式(1.8)と(1.9)を満たす解 (ξ^i,η_a) として $(\xi^i_1,\eta^1_a)=(\dot{q}^i,\dot{\lambda}_a+\rho\lambda_a)$ が得られる。この解を定理2の解の組の一方に選ぶと保存量(1.10)は次の(1.11)となる[15,16]：

定理3．積分(1.6)の拘束条件(1.7)の下での極値問題において，最適経路上，即ち極値問題より生成される E-L 方程式系の解上で(1.8)と(1.9)を満たす解 $\xi^i(\dot{\lambda},\dot{q},\lambda,q,t)$ と $\eta_a(\dot{\lambda},\dot{q},\lambda,q,t)$

$(a=1,\cdots,m;\ i=1,\cdots,n)$ により，次の保存量が構成される：

(1. 11)

$$\Omega=\dot{q}^i\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\frac{d\xi^j}{dt}+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial q^j}\xi^j+\frac{\partial F^a}{\partial\dot{q}^i}\eta_a\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}+\rho\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\xi^i$$

2.　Open-loop ナッシュ戦略

最適制御問題の応用例として，微分ゲームにおける n-部門の Open-loop ナッシュ戦略を考察する。Open-loop ナッシュ戦略とは，各部門が互いに戦略についての情報を提供しないで，自身の利得の最大化を計るという戦略である。即ち，各部門が他の部門の戦略を考慮しないで（他の部門の未知の制御変数を定数とみなして）自身の利得の最大化を計るのである。このため，これまでナッシュ戦略を通常の変分原理の枠組みの中で議論することはできなかった。ここでは各部門固有の利得関数を部門共通の利得関数に統一した後，新たな変数を付加した空間において，その利得関数に関するある拡張した最大化問題における最適経路が，もとの変数に関してはナッシュ戦略における最適経路と一致するような最大化問題として定式化する。

先ずフェルシュトマン-ニッツアンのモデルを次の n-部門の Open-loop ナッシュ戦略モデルに一般化する。部門 i $(i=1,\cdots,n)$ は部門共通の状態変数 $x(t)$ と固有の制御変数 $u^i(t)$ を持ち，他の部門の未知の制御変数 u^j $(j\neq i)$ を定数とみなして，積分

(2. 1-i)　$$\int_0^T e^{-\rho t}(\varphi(x)+\psi_i(u^1,\cdots,u^n))dt$$

の，拘束条件

(2. 2)　$$\dot{x}=\alpha x+\sum_{k=1}^{n}\beta_k u^k$$
$(\alpha,\ \beta_k$: const., $k=1,\cdots,n;\ \alpha<0)$

の下での最大化を計る。ここに，それぞれ φ は単調増加，ψ_i は部門 i の固有の制御変数 u^i に関して凹性の条件：

(2. 3-i)　$$\varphi'>0,\quad \frac{\partial^2\psi_i}{\partial u^i\partial u^i}<0$$

を満たす関数とする。従って部門 i はラグランジアン L_i（π_i: ラグランジュ乗数）

$$L_i=e^{-\rho t}(\varphi(x)+\psi_i(u^1,\cdots,u^n))+\pi_i\left(\dot{x}-\alpha x-\sum_{k=1}^{n}\beta_k u^k\right)$$

を持ち，その u^j と π_j $(j\neq i)$ を定数とみなした E-L 方程式系は，拘束条件(2. 2)及び

(2. 4-i)　$$\dot{\pi}_i+\alpha\pi_i=e^{-\rho t}\varphi'(x)$$

(2. 5-i)　$$\beta_i\pi_i=e^{-\rho t}\frac{\partial\psi_i(u^1,\cdots,u^n)}{\partial u^i}$$

から成る。ここで各部門の利得関数を統一するために ψ_i $(i=1,\cdots,n)$ は更に

(2. 6)　$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial u^j\partial u^i}=\frac{\partial^2\psi_j}{\partial u^i\partial u^j}\quad (i,j=1,\cdots,n)$$

を満たしているとする。このとき，ψ_i $(i=1,\cdots,n)$ に対して

(2. 7)　$$\frac{\partial\psi}{\partial u^i}=\frac{\partial\psi_i}{\partial u^i}\quad (i=1,\cdots,n)$$

を満たす関数 ψ $(u^1,\cdots,u^n)$ が存在する。従って，部門 i は u^j と π_j $(j\neq i)$ を定数とみなしているので，利得関数 $\varphi+\psi_i$ を $\varphi+\psi$ に取り換えても生成される E-L 方程式系は変わらない。この取り換えによって(2. 3-i)と同様の条件：

(2. 8)　$$\varphi'>0,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial u^i\partial u^i}<0\quad (i=1,\cdots,n)$$

はキープされたままである。従って：

定理 4． 積分(2. 1-i) (i $=1,\cdots,n$) において $\varphi(x)+\psi_i$ $(u^1,\cdots,u^n)$ は(2. 3-i) $(i=1,\cdots,n)$ 及び(2. 6)を満たしているとする。このとき，n-部門の Open-loop ナッシュ戦略において，拘束条件(2. 2)の下での積分(2. 1-i) (i $=1,\cdots,n$) の最

大化問題は，同条件(2.2)の下での積分

(2.9)　$$\int_0^T e^{-\rho t}(\varphi(x)+\psi(u^1,\cdots,u^n))dt$$

の最大化問題と同値となる。但し$\psi(u^1,\cdots,u^n)$は(2.7)を満たす関数である。

注意１．Open-loop ナッシュ戦略において，部門 i は E-L 方程式系を導く際に u^j $(j\neq i)$ を定数とみなしているので，拘束条件(2.2)における項 $\sum_{k=1}^n \beta_k u^k$ を $\beta_i u^i$ に置き換えても(2.4-i)と(2.5-i)は不変である。

注意２．注12）の論文でフェルシュトマン-ニッツアンは，部門 i $(i=1,\cdots,n)$ の利得関数を$V_i=\gamma f(x)-C(u^i)$ (γ: const.)（これらは定理１より$V=\gamma f(x)-\sum_{i=1}^n C(u^i)$ に統一することができる)，$f(x)=ax-bx^2$ (a, b: const.)，$C(u^i)=\frac{1}{2}c(u^i)^2$ (c: const.) としたモデルで論じている。我々は一般論の後，一つのリダクションとしてこのモデルに触れる。

変数 $y^\sigma(t)$ $(\sigma=1,\cdots,n-1)$ を導入し

(2.10a)　$$z^1=\frac{1}{n}\left(x+\sum_{\sigma=1}^{n-1}y^\sigma\right)$$

(2.10b)　$$z^{\sigma+1}=\frac{1}{n}(x-y^\sigma)\quad(\sigma=1,\cdots,n-1)$$

とおくと

(2.11)　$$\sum_{k=1}^n z^k=x$$

より積分(2.9)は

(2.12)　$$\int_0^T e^{-\rho t}(\varphi(z^1+\cdots+z^n)+\psi(u^1,\cdots,u^n))dt$$

となる。この積分の，拘束条件

(2.13)　$$\dot z^i=\alpha z^i+\beta_i u^i\quad(i=1,\cdots,n)$$

の下での最大化問題を通常の変分原理の枠組みの中で考察する。ここで(2.12)における ψ は凹性の条件[17)]：

(2.14)　$$(-1)^k D_k(\psi)>0\quad(k=1,\cdots,n)$$

を満たしているとする。但し $D_k(\psi)$ は $\psi(u^1,\cdots,u^n)$ のヘッセ行列の最初の k 個の行と列の成分より構成される行列式である。このとき，ラグランジアン L（π_i: ラグランジュ乗数）は

(2.15)　$$L=e^{-\rho t}(\varphi(z^1+\cdots+z^n)+\psi(u^1,\cdots,u^n))+\sum_{k=1}^n\pi_k(\dot z^k-\alpha z^k-\beta_k u^k)$$

で，その E-L 方程式系は(2.13)と

(2.16)　$$\dot\pi+\alpha_i\pi_i=e^{-\rho t}\frac{\partial\varphi(z^1+\cdots+z^n)}{\partial z_i}\quad(i=1,\cdots,n)$$

(2.17)　$$\beta_i\pi_i=e^{-\rho t}\frac{\partial\psi(u^1,\cdots,u^n)}{\partial u_i}\quad(i=1,\cdots,n)$$

から成る。(2.13)の $i=1,\cdots,n$ についての総和は(2.11)より(2.2)となる。(2.16)は $\partial\varphi(z^1+\cdots+z^n)/\partial z^i=\varphi'(x)$ より(2.4-i) $(i=1,\cdots,n)$ と同値，(2.17)は(2.7)の下で(2.5-i) $(i=1,\cdots,n)$ と同値である。(2.2)，(2.16)，(2.17)は最適経路 $x(t)$ と $u(t)$ を定めるために用いられる。(2.10b)を(2.13)に代入した式は(2.2)より

(2.18)　$$\dot y^\sigma-\alpha y^\sigma=\sum_{k=1}^n\beta_k u^k-n\beta_{\sigma+1}u^{\sigma+1}\quad(\sigma=1,\cdots,n-1)$$

となる。(2.18)の右辺を最適経路 $u(t)=(u^1(t),\cdots,u^n(t))$ 上で $\varphi^\sigma(t)$ と表し，その補助方程式 $\dot y^\sigma-\alpha y^\sigma=0$ の解 $y^\sigma=A^\sigma e^{\alpha t}$ (A^σ: const.) における定数 A^σ を t の任意関数に置き換えて(2.18)に代入して決定すると

$$A^\sigma(t)=\int\varphi^\sigma(t)e^{-\alpha t}dt$$

となる。従って最適経路 $x(t)$ と $u(t)$ が存在すれば最適経路 $y(t)=(y^1(t),\cdots,y^{n-1}(t))=$

$(e^{\alpha t}A^1(t), \cdots, e^{\alpha t}A^{n-1}(t))$ も存在する。以上より：

定理5．積分(2.9)における関数 $\varphi(x)+\psi(u^1, \cdots, u^n)$ は(2.8)を満たし，積分(2.12)における関数 $\varphi(z^1+\cdots+z^n)+\psi(u^1, \cdots, u^n)$ は $\varphi'(z^1+\cdots+z^n)>0$ と(2.14)を満たしているとする。このとき，n-部門 Open-loop ナッシュ戦略における積分(2.9)の拘束条件(2.2)の下での最大化問題は，通常の変分原理の枠組みの中での積分(2.12)の拘束条件(2.13)の下での最大化問題に含まれる。即ち両者の最適経路 $x(t)$ と $u(t)$ は一致する。

3. 2部門 Open-loop Nash 戦略とその最適経路

2部門の Open-loop Nash 戦略におけるフェルシュトマン-ニッツアンのモデルを一般化して，各部門 i $(i=1, 2)$ が，他の部門 j $(j\neq i)$ の制御変数 u^j を定数とみなして，積分

(3.1-i) $$\int_0^T e^{-\rho t}(\varphi(x)+\psi_i(u^1, u^2))dt$$

の拘束条件

(3.2) $$\dot{x}=\alpha x+\beta_1 u^1+\beta_2 u^2 \quad (\alpha, \beta_1, \beta_2\text{: const.}, \alpha<0)$$

の下での最大化を計るという戦略を考察する。ここで(2.3-i) (i＝1, 2) を満たすように，関数 $\varphi(x)+\psi_i(u^1, u^2)$ を

(3.3a) $$\varphi(x)=a_1x+\frac{1}{2}a_2x^2 \quad (x<-a_1/a_2;\ a_1, a_2\text{: const.};\ a_1>0,\ a_2<0)$$

(3.3b) $$\psi_i(u^1, u^2)=b_iu^i+\frac{1}{2}b_{ii}(u^i)^2+b_{12}u^1u^2+g_i(u^j) \quad (b_i, b_{ij}\text{: const.}, i, j=1, 2;\ b_{ii}<0)$$

として定める（g_1は u^2，g_2は u^1のみの任意関数)。このとき(2.7)より ψ_i は

(3.4) $$\psi(u^1, u^2)=b_1u^1+b_2u^2+\frac{1}{2}b_{11}(u^1)^2+b_{12}u^1u^2+\frac{1}{2}b_{22}(u^2)^2$$

に統一される。ここで ψ には更に (u^1, u^2)-空間における凹性の条件 $D_1(\psi)=b_{11}<0$ と $D_2(\psi)=b_{11}b_{22}-b_{12}^2>0$ が付加し，従って

(3.5) $$b_{11}<0,\quad b_{22}<0,\quad b_{11}b_{22}-b_{12}^2>0$$

であるとする。$n=2$ のとき，(2.10a)と(2.10b)はそれぞれ

(3.6a) $$z^1=\frac{1}{2}(x+y)$$

(3.6b) $$z^2=\frac{1}{2}(x-y)$$

となる。また，ラグランジアン(2.15)は

(3.7) $$\begin{aligned} L=e^{-\rho t}(\varphi(z^1+z^2)+\psi(u^1, u^2)) \\ +\pi_1(\dot{z}^1-\alpha z^1-\beta_1u^1) \\ +\pi_2(\dot{z}^2-\alpha z^2-\beta_2u^2) \end{aligned}$$

となり，その E-L 方程式系は $i=1, 2$ とした(2.13)と

(3.8) $$\dot{\pi}_i+\alpha\pi_i=e^{-\rho t}(a_1+a_2(z^1+z^2))$$

(3.9) $$\beta_i\pi_i=e^{-\rho t}(b_i+b_{1i}u^1+b_{i2}u^2)$$

から成る。定理4と定理5により，2部門 Open-loop ナッシュ戦略において，積分(3.1-i)の拘束条件(3.2)の下での最大化問題は，通常の変分原理の枠組みの中での積分

(3.10) $$\int_0^T e^{-\rho t}(\varphi(z^1+z^2)+\psi(u^1, u^2))dt$$

の，拘束条件

(3.11) $$\dot{z}^i=\alpha z^i+\beta_iu^i \quad (i=1, 2)$$

の下での最大化問題に含まれる。ここに(3.10)における $\varphi(z^1+z^2)+\psi(u^1, u^2)$ は(3.3a)の $\varphi(x)$ と(3.5)を満たす(3.4)の $\psi(u^1, u^2)$ によ

り与えられる利得関数である。

ここで定理３は，$q=(z^1, z^2, u^1, u^2)$，$\lambda=(\pi_1, \pi_2)$ と置くと次のようになる：

定理3′．積分(3. 10)の拘束条件(3. 11)の下での(3. 10)の最大化問題において，最適経路上，即ち最大化問題より生成される E-L 方程式系の解上で

(3. 12a)　$\dot{\xi}^1-\alpha\xi^1=\beta_1\xi^3$

(3. 12b)　$\dot{\xi}^2-\alpha\xi^2=\beta_2\xi^4$

(3. 12c)　$\dot{\eta}_1+\alpha\eta_1=a_2e^{-\rho t}(\xi^1+\xi^2)$

(3. 12d)　$\dot{\eta}_2+\alpha\eta_2=a_2e^{-\rho t}(\xi^1+\xi^2)$

(3. 12e)　$\beta_1\eta_1=e^{-\rho t}(b_{11}\xi^3+b_{12}\xi^4)$

(3. 12f)　$\beta_2\eta_2=e^{-\rho t}(b_{12}\xi^3+b_{22}\xi^4)$

を満たす解 $\xi^i(\dot{q}, q, t)$　$(i=1, 2, 3, 4)$ と $\eta_a(\dot{q}, q, t)$　$(a=1, 2)$ により，次の保存量が構成される：

(3. 13)　$$\Omega=\dot{z}^1\eta_1+\dot{z}^2\eta_2-(\dot{\pi}_1+\rho\pi_1)\,\xi^1-(\dot{\pi}_2+\rho\pi_2)\,\xi^2$$

解 ξ^i $(i=1, 2, 3, 4)$ と η_a $(a=1, 2)$ を求めるために，先ず(3. 12c)と(3. 12d)の差 $\dot{\eta}_2-\dot{\eta}_1=-\alpha(\eta_2-\eta_1)$ の積分

(3. 14)　$\eta_2=\eta_1+C_1e^{-\alpha t}$　$(C_1\text{: const.})$

を(3. 12e)と(3. 12f)に代入すると，(3. 5)より $b_{11}b_{22}-b_{12}^2\neq 0$ であるから，ξ^3 と ξ^4 がそれぞれ

(3. 15)　$$\xi^3=n_1e^{\rho t}\eta_1-\frac{b_{12}\beta_2}{B}C_1e^{(\rho-\alpha)t}$$

(3. 16)　$$\xi^4=n_2e^{\rho t}\eta_1+\frac{b_{11}\beta_2}{B}C_1e^{(\rho-\alpha)t}$$

と定まる。ここに n_1 と n_2 は定数

$$n_1=\frac{b_{22}\beta_1-b_{12}\beta_2}{B},\quad n_2=\frac{b_{11}\beta_2-b_{12}\beta_1}{B}\qquad (B\equiv b_{11}b_{22}-b_{12}^2)$$

である。次に(3. 16)と(3. 17)を(3. 12a)と(3. 12b)の和に代入して得られた式：

$$(\dot{\xi}^1+\dot{\xi}^2)-\alpha(\xi^1+\xi^2)=(n_1\beta_1+n_2\beta_2)e^{\rho t}\eta_1+n_2\beta_2C_1e^{(\rho-\alpha)t}$$

に，(3. 12c)を $\xi^1+\xi^2=e^{\rho t}(\dot{\eta}_1+\alpha\eta_1)/a_2$ として代入すると

(3. 17)　$$\ddot{\eta}_1+\rho\dot{\eta}_1+(\alpha(\rho-\alpha)-a_2(n_1\beta_1+n_2\beta_2))\eta_1=a_2n_2\beta_2C_1e^{-\alpha t}$$

となる。(3. 5)より

$$N_\beta\equiv n_1\beta_1+n_2\beta_2=\frac{(b_{22}\beta_1-b_{12}\beta_2)^2}{b_{22}(b_{11}b_{12}-b_{12}^2)}+\frac{\beta_2^2}{b_{22}}<0$$

であるから(3. 17)の補助方程式の判別式 D は正：

$$D=(2\alpha-\rho)^2+4a_2N_\beta>0$$

である。従って(3. 17)の解 η_1 は

$$\eta_1=A_1e^{(-\rho+\sqrt{D})t/2}+A_2e^{(-\rho-\sqrt{D})t/2}-\frac{n_2\beta_2}{N_\beta}C_1e^{-\alpha t}\qquad (A_1, A_2, C_1\text{: const.})$$

と定まる。これを(3. 14)，(3. 15)，(3. 16)に代入して，それぞれ

$$\eta_2=A_1e^{(-\rho+\sqrt{D})t/2}+A_2e^{(-\rho-\sqrt{D})t/2}+\frac{n_1\beta_1}{N_\beta}C_1e^{-\alpha t}$$

$$\xi^3=n_1\left(A_1e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}+A_2e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}\right)-\frac{\beta_1\beta_2^2}{BN_\beta}C_1e^{(\rho-\alpha)t}$$

$$\xi^4=n_2\left(A_1e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}+A_2e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}\right)+\frac{\beta_1^2\beta_2}{BN_\beta}C_1e^{(\rho-\alpha)t}$$

が定まる。更にこれらの ξ^3 と ξ^4 をそれぞれ(3. 12a)と(3. 12b)に代入して得た式より，ξ^1 と ξ^2 が

$$\xi^1=\frac{2n_1\beta_1}{\rho-2\alpha+\sqrt{D}}A_1e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}+\frac{2n_1\beta_1}{\rho-2\alpha-\sqrt{D}}A_2e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}-\frac{\beta_1^2\beta_2^2}{BN_\beta(\rho-2\alpha)}C_1e^{(\rho-\alpha)t}+C_2e^{\alpha t}$$

$$\xi^2=\frac{2n_2\beta_2}{\rho-2\alpha+\sqrt{D}}A_1e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}+\frac{2n_2\beta_2}{\rho-2\alpha-\sqrt{D}}A_2e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}+\frac{\beta_1^2\beta_2^2}{BN_\beta(\rho-2\alpha)}C_1e^{(\rho-\alpha)t}-C_2e^{\alpha t}$$

$(A_1, A_2, C_1, C_2$: const.)

と定まる。これらの $\eta_1, \eta_2, \xi^1, \xi^2$ において係数 A_1, A_2, C_1, C_2 は任意定数であるから，保存量(3.13)より次の保存量が得られる：

$$\Omega_1=(\dot{z}^1+\dot{z}^2)\,e^{(-\rho+\sqrt{D})t/2}-\frac{2}{\rho-2\alpha+\sqrt{D}}(n_1\beta_1(\dot{\pi}_1+\rho\pi_1)+n_2\beta_2(\dot{\pi}_2+\rho\pi_2))\,e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}$$

$$\Omega_2=(\dot{z}^1+\dot{z}^2)\,e^{(-\rho-\sqrt{D})t/2}-\frac{2}{\rho-2\alpha-\sqrt{D}}(n_1\beta_1(\dot{\pi}_1+\rho\pi_1)+n_2\beta_2(\dot{\pi}_2+\rho\pi_2))\,e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}$$

$$\Omega_3=(n_2\beta_2\dot{z}^1-n_1\beta_1\dot{z}^2)\,e^{-\alpha t}-\frac{\beta_1^2\beta_2^2}{B(\rho-2\alpha)}((\dot{\pi}_1+\rho\pi_1)+(\dot{\pi}_2+\rho\pi_2))\,e^{(\rho-\alpha)t}$$

$$\Omega_4=((\dot{\pi}_1+\rho\pi_1)-(\dot{\pi}_2+\rho\pi_2))\,e^{\alpha t}$$

更に，(3.6a, b)と(3.8)からの $\dot{\pi}_i=e^{-\rho t}(a_1+a_2x)-\alpha\pi_i\quad(i=1,\ 2)$；(3.6a, b)と(3.2)からの $\dot{z}^1+\dot{z}^2=\alpha x+\beta_1u^1+\beta_2u^2$；$n=2$ のときの(2.18)：$\dot{y}-\alpha y=\beta_1u^1-\beta_2u^2$ 及び(3.9)を u^i $(i=1, 2)$ について解いた式を用いて Ω_i $(i=1, 2, 3, 4)$ はそれぞれ

(3.18) $$\Omega_1=\left(\frac{\rho-\sqrt{D}}{2}x+\frac{a_1(\rho-2\alpha-\sqrt{D})}{2a_2}-N_b\right)e^{(-\rho+\sqrt{D})t/2}-\frac{(\rho-\sqrt{D})N_{\beta\pi}}{\rho-2\alpha+\sqrt{D}}\,e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}$$

(3.19) $$\Omega_2=\left(\frac{\rho+\sqrt{D}}{2}x+\frac{a_1(\rho-2\alpha-\sqrt{D})}{2a_2}-N_b\right)e^{(-\rho-\sqrt{D})t/2}-\frac{(\rho+\sqrt{D})N_{\beta\pi}}{\rho-2\alpha-\sqrt{D}}\,e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}$$

(3.20) $$\Omega_3=\left(\frac{\alpha(n_1\beta_1-n_2\beta_2)}{2}x-\frac{\alpha N_\beta}{2}y+\frac{\beta_1\beta_2(b_1\beta_2-b_2\beta_1)}{B}\right)e^{-\alpha t}-\frac{\alpha\beta_1^2\beta_2^2}{(\rho-2\alpha)B}(\pi_1-\pi_2)\,e^{(\rho-\alpha)t}$$

(3.21) $$\Omega_4=(\rho-\alpha)(\pi_1-\pi_2)\,e^{\alpha t}$$

と変形できる。ここに

(3.22) $$N_b\equiv n_1b_1+n_2b_2$$ $$N_{\beta\pi}\equiv n_1\beta_1\pi_1+n_2\beta_2\pi_2$$

である。こうして定理3（そのリダクション定理3′）より次の保存量が得られる（Ω_3 は新たに導入した変数 y を持つ保存量）：

定理6． 2部門 Open-loop ナッシュ戦略において，各部門 i $(i=1, 2)$ が，他の部門 j $(j\neq i)$ の制御変数 u^j を定数とみなして，拘束条件(3.2)′の下での積分

(3.1-i)′ $$\int_0^T e^{-\rho t}\left(a_1x+\frac{1}{2}a_2x^2+b_iu^i+\frac{1}{2}b_{ii}(u^i)^2+b_{12}u^1u^2+g_i(u^j)\right)dt\qquad(j\neq i)$$

$(x<-a_1/a_2;\ a_i, b_i, b_{ij}$: const., $i, j=1, 2;$ $a_1>0, a_2<0, b_{ii}<0)$

の最大化を計るとする。このとき保存量(3.18)，(3.19)，(3.21)が存在する。

4. Open-loop ナッシュ戦略における最適経路

保存量(3.18)と(3.19)における $N_{\beta\pi}$ を消去すると経路

(4.1)
$$x(t)=\Xi_1 e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}+\Xi_2 e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}+\frac{a_1 N_\beta+(\rho-\alpha)N_b}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2 N_\beta}$$

が得られる。ここに $\Xi_1=\Omega_1/\sqrt{D}$, $\Xi_2=\Omega_2/\sqrt{D}$ である。また x を消去すると

$$N_{\beta\pi}=-2a_2 N_\beta\left(\frac{\Xi_1}{\rho-\sqrt{D}}e^{-(\rho+\sqrt{D})t/2}+\frac{\Xi_2}{\rho+\sqrt{D}}e^{-(\rho+\sqrt{D})t/2}\right)-\frac{N_\beta(a_1\alpha+a_2 N_b)}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2 N_\beta}e^{-\rho t}$$

が得られる。これを(3.22)の $N_{\beta\pi}$ に代入した式と(3.21)より

(4.2)
$$\pi_1(t)=-\frac{2a_2\Xi_1}{\rho-\sqrt{D}}e^{-(\rho+\sqrt{D})t/2}+\frac{2a_2\Xi_2}{\rho+\sqrt{D}}e^{(-\rho+\sqrt{D})t/2}+n_2\beta_2\Xi_4 e^{-\alpha t}-\frac{a_1\alpha+a_2 N_b}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2 N_\beta}e^{-\rho t}$$

(4.3)
$$\pi_2(t)=-\frac{2a_2\Xi_1}{\rho-\sqrt{D}}e^{-(\rho+\sqrt{D})t/2}+\frac{2a_2\Xi_2}{\rho+\sqrt{D}}e^{(-\rho+\sqrt{D})t/2}-n_1\beta_1\Xi_4 e^{-\alpha t}-\frac{a_1\alpha+a_2 N_b}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2 N_\beta}e^{-\rho t}$$

が得られる。ここに $\Xi_4=\Omega_4/N_\beta$ である。これらの最適経路 $\pi_i(t)$ $(i=1,2)$ を(3.9)に代入すると

(4.3)
$$u^1(t)=-\frac{2a_2 n_1\Xi_1}{\rho-\sqrt{D}}e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}+\frac{2a_2 n_1\Xi_2}{\rho+\sqrt{D}}e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}+\frac{\beta_1\beta_2^2\Xi_4}{B}e^{(\rho-\alpha)t}-\frac{n_1(a_1\alpha+a_2 N_b)}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2 N_\beta}-\frac{b_{22}b_1-b_{12}b_2}{B}$$

(4.4)
$$u^2(t)=-\frac{2a_2 n_2\Xi_1}{\rho-\sqrt{D}}e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}+\frac{2a_2 n_2\Xi_2}{\rho+\sqrt{D}}e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}-\frac{\beta_1^2\beta_2\Xi_4}{B}e^{(\rho-\alpha)t}-\frac{n_2(a_1\alpha+a_2 N_b)}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2 N_\beta}-\frac{b_{11}b_2-b_{12}b_1}{B}$$

が得られる。最後に最適経路(4.1), (4.2), (4.3)を(3.20)に代入すると

(4.4)
$$\begin{aligned}y(t)=&\frac{n_1\beta_1-n_2\beta_2}{N_\beta}\left(\Xi_1 e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}+\Xi_2 e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}\right)\\&+\Xi_3 e^{\alpha t}+\frac{2\beta_1^2\beta_2((\rho-\alpha)(b_{12}n_1+b_{22}n_2)-(\rho-2\alpha)\beta_2)}{B\alpha(\rho-2\alpha)}\Xi_4 e^{(\rho-\alpha)t}\\&+\frac{(n_1\beta_1-n_2\beta_2)(a_1 N_\beta+(\rho-\alpha)N_b)}{N_\beta(\alpha(\rho-\alpha)-a_2 N_\beta)}+\frac{2\beta_1\beta_2(n_2(b_{22}b_1-b_{12}b_2)-n_1(b_{11}b_2-b_{12}b_1))}{BN_\beta\alpha}\end{aligned}$$

が得られる。ここに $\Xi_3=2\Omega_3/N_\beta\alpha$ である。

定理7．有限時間区間 $(T<\infty)$ における2部門 Open-loop ナッシュ戦略において，各部門 i $(i=1,2)$ が積分(3.1-i)′の拘束条件(3.2)の下での最大化を計るとする。このとき最適経路 $x(t)$,

$u^1(t)$, $u^2(t)$ がそれぞれ(3.1), (3.4), (3.5)のように定まる。

無限時間区間 $(T=\infty)$ における積分(2.12)の拘束条件(2.13)の下での最大化問題では，最適経路が存在するためには横断性の条件：

$$\lim_{t\to\infty}(\pi_1(t)z^1(t)+\pi_2(t)z^2(t))=0 \tag{4.5}$$

を満たすことが要求される。(3.6a)′, (3.6b)′により $\pi_1(t)z^1(t)+\pi_2(t)z^2(t)$ を

$$\pi_1(t)z^1(t)+\pi_2(t)z^2(t)$$
$$=\frac{1}{2}(\pi_1(t)+\pi_2(t))x(t)+\frac{1}{2}(\pi_1(t)-\pi_2(t))y(t)$$

と書き換えて(4.1), (4.2), (4.3), (4.6)を代入すると $e^{(\rho-2\alpha-\sqrt{D})t/2}$, $e^{(\rho-2\alpha+\sqrt{D})t/2}$, $e^{(-\rho-\sqrt{D})t/2}$, $e^{(-\rho+\sqrt{D})t/2}$, $e^{\sqrt{D}t}$, $e^{-\sqrt{D}t}$, $e^{(\rho-2\alpha)t}$, $e^{-\alpha t}$, $e^{-\rho t}$ に関する1次の多項式が得られる。この多項式において $t\to\infty$ のとき $e^{(\rho-2\alpha-\sqrt{D})t/2}$, $e^{(-\rho-\sqrt{D})t/2}$, $e^{-\sqrt{D}t}$, $e^{-\alpha t}$, $e^{-\rho t}$ は全て零に収束するので，∞ に発散する他の $e^{(\rho-2\alpha+\sqrt{D})t/2}$, $e^{(-\rho+\sqrt{D})t/2}$, $e^{\sqrt{D}t}$, $e^{(\rho-2\alpha)t}$ に関する項の係数及び定数項は条件(4.5)より零，即ち次の5式：

$$\left(n_2\beta_2-n_1\beta_1\right)\Xi_1\Xi_4-\frac{n_2\beta_2-n_1\beta_1}{N_\beta}\Xi_2$$

$$\left(a_1\alpha+a_2N_b+\frac{2a_1a_2(N_\beta+(\rho-\alpha)N_b)}{\rho+\sqrt{D}}\right)\Xi_2$$

$$\frac{4a_2}{\rho+\sqrt{D}}\Xi_2^2$$

$$\frac{2\beta_1^2\beta_2((\rho-\alpha)(b_{12}n_1+b_{22}n_2)-(\rho-2\alpha)\beta_2)}{B\alpha(\rho-2\alpha)}\Xi_4$$

$$\Xi_3-\frac{2a_2\rho}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2N_\beta}\Xi_1\Xi_2$$

はすべて零であり，これらより $\Xi_2=\Xi_3=\Xi_4=0$ となる。従って(4.1), (4.4), (4.5)より横断性の条件(4.5)を満たす最適経路：

$$x(t)=\Xi_1e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}+\frac{a_1N_\beta+(\rho-\alpha)N_b}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2N_\beta} \tag{4.1$'$}$$

$$u^1(t)=\frac{-2a_2n_1\Xi_1}{\rho-\sqrt{D}}e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}-\frac{n_1(a_1\alpha+a_2N_b)}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2N_\beta}-\frac{b_{22}b_1-b_{12}b_2}{B} \tag{4.4$'$}$$

$$u^2(t)=-\frac{2a_2n_2\Xi_1}{\rho-\sqrt{D}}e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}-\frac{n_2(a_1\alpha+a_2N_b)}{\alpha(\rho-\alpha)-a_2N_\beta}-\frac{b_{11}b_2-b_{12}b_1}{B} \tag{4.5$'$}$$

が得られる。

定理8． 無限時間区間 $(T=\infty)$ における2部門 Open-loop ナッシュ戦略において，各部門 i $(i=1,2)$ が積分(3.1-i)′の拘束条件(3.2)の下での最大化を計るとする。このとき最適経路 $x(t)$, $u^1(t)$, $u^2(t)$ は(4.1)′, (4.4)′, (4.5)′のように定まる。

公共財の自発的供給モデル　ここで得られた結果をフェルストマン-ニッツアンの公共財の自発的供給モデル[18] に応用することができる。(3.1-i)′において $a_1=a\gamma$, $a_2=-2b\gamma$, $b_1=b_2=0$, $b_{11}=b_{22}=-c$, $b_{12}=0$; $g_1(u^2)=g_2(u^1)=0$, 即ち

$$\int_0^T\left(\gamma(ax-bx^2)-\frac{1}{2}c(u^i)^2\right)dt \tag{13.2-i$''$}$$

$$(x<a/(2b),\ a,\ b,\ c,\ \gamma\text{: const.},\ a>0,\ b>0,\ c>0,\ \gamma>0)$$

とし，更に拘束条件(3.2)において $\alpha=-\delta$, $\beta_1=\beta_2=1$, 即ち

$$\dot{x}=-\delta x+u^1+u^2\quad(\delta\text{: const.},\ \delta>0) \tag{3.2$'$}$$

とする。ここに状態変数 x は公共財のストック，部門 i $(i=1,2)$ の制御変数 u^i は公共財への投資を表す。このとき(3.18)-(3.21)はそれぞれ

$$\Omega_1=\left(\frac{\rho-\sqrt{D}}{2}x-\frac{a\gamma(\rho+2\delta-\sqrt{D})}{4b\gamma}\right)e^{(-\rho+\sqrt{D})t/2}+\frac{\rho-\sqrt{D}}{c(\rho+2\delta+\sqrt{D})}(\pi_1+\pi_2)e^{(\rho+\sqrt{D})t/2}$$

$$\Omega_2=\left(\frac{\rho+\sqrt{D}}{2}x-\frac{a\gamma(\rho+2\delta+\sqrt{D})}{4b\gamma}\right)e^{-(\rho+\sqrt{D})t/2}+\frac{\rho+\sqrt{D}}{c(\rho+2\delta+\sqrt{D})}(\pi_1+\pi_2)e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}$$

$$\Omega_3=\frac{1}{c}(\delta x-\delta y-u^1-u^2)e^{\delta t}-\frac{\rho+\delta}{(\rho+2\delta)c^2}(\pi_1-\pi_2)e^{(\rho+\delta)t}$$

$$\Omega_4=(\pi_1-\pi_2)e^{-\delta t}$$

となり，その中の Ω_1, Ω_2, Ω_4 は２部門 Open-loop ナッシュ戦略における積分(3. 2-i)″ (i=1, 2) の，拘束条件(3. 2)′ の下での最大化問題の保存量である（Ω_3 は新たに導入した変数 y を持つ保存量）。更に，無限限時間区間 $(T=\infty)$ における最適経路(4. 1)′ は

$$x(t)=\Xi_1 e^{(\rho-\sqrt{D})t/2}+\frac{2a\gamma}{\delta(\rho+\delta)c+4b\gamma}$$

となる。従って

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\frac{2a\gamma}{\delta(\rho+\delta)c+4b\gamma}$$

が得られる。これは公共財のストックの Open-loop ナッシュ均衡レベル[19] である。

注

1) P. A. Samuelson, Law of conservation of the capital-output ratio, *Proc. Nat. Acad. Sci., Appl. Math. Sci.* **67** (1970), pp. 1477–1479.
2) S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen I, II, III, Teubner, Leipzig (1888), (1890), (1893). Reprinted by Chelsea, New York (1970).
3) T. Nôno, A classification of neutral technical changes: An application of Lie theory, II, III, *Bull. Fukuoka Univ. Ed. III* **20** (1970), 47–62; **21** (1971), 43–56; **22** (1972), pp. 67–81.
4) E. Noether, Invariante Variations Probleme, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Cl. II* **1918** (1918), pp. 235–257.
5) E. Bessel-Hagen: Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik., *Math. Ann.* **84** (1921), pp. 258–276.
6) G. Caviglia, Composite variational principles, added variables, and constant of motion, *Internat. Theoret. Phys.* **25** (1986), pp. 139–146.
7) G. Caviglia, Composite variational principles and determination of conservation laws, *J. Math. Phys.* **29** (1988), pp. 812–816.
8) F. Mimura and T. Nôno, A method for deriving new conservation laws, *Bull. Kyushyu Inst. Tech. Math. Natur. Sci.* **42** (1995), pp. 1–17.
9) 三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその新古典派的経済成長理論への応用，広島経済大学経済論集 第33巻第２号（2010年），pp. 17–27.
10) 三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその枯渇性資源を含む最適資産蓄積問題への応用，広島経済大学経済論集　第34巻第１号（2011年），pp. 17–27.
11) F. Fujiwara, F. Mimura and T. Nôno, A composite Maximizing problem for the open-loop Nash strategies, *Sci. Math. Japon.* **55** (2002), pp. 277–286.
12) C. Fershtman and S. Nitzan, Dynamic voluntary provision of public goods, *Europian Economic Review* **35** (1991), pp. 1057–1067.
13) Reference 8), Theorem 6.
14) F. Fujiwara, F. Mimura and T. Nôno, New derivation of conservation laws for maximizing problem under constraints, *Sci. Math. Japon.* **55** (2001), pp. 383–392.
15) Reference 14), Theorem 2; for the extremal problem of (1. 6) under single constraint, see the following reference 16), Theorem 2.
16) F. Mimura and T. Nôno, A method for the derivation of new conservation laws in economic growth models, *Bull. Kyushyu Inst. Tech. Math. Natur. Sci.* **44** (1997), pp. 7–22.
17) A. Takayama, Mathematical economics, Dryden Press, Illinois, 1974; Cambridge University Press, New York, 1985.
18) Reference 12), in which K, x_i, r and α are denoted here as x, u^i, ρ and γ respectively.
19) Reference 12), Theorem 2, in which n is given here as $n=2$.