広島経済大学経済研究論集
第34巻第２号　2011年９月

観測誤差を含む時系列モデルにおける推定量の比較

得　津　康　義*

1.　は　じ　め　に

観測されるデータにはしばしばノイズが含まれていることがあり，これは観測誤差（Measurement error）と呼ばれる。観測誤差の問題は Fuller（1996）に代表されるように様々な研究がこれまでにもなされてきた。

Tanaka（2002）では観測されたデータにノイズが含まれているかどうかについての LM 検定統計量を提案している。この検定統計量の帰無仮説は観測されるデータにはノイズが含まれないとしており，さらに観測できないプロセス（Signal Process）のパラメーターを利用している。また，計量ファイナンスにおけるボラティリティ分析では，高頻度データを用いたとしても真のプロセスまでは観察することはできないため，何らかのモデルを想定することになる[1)]。このように，時系列データを分析する際に観測できないプロセスのパラメーターを推定しなければならない場合がしばしば出てくる。

仮に Signal Process が自己回帰モデル（AR モデル）であり，データにノイズが含まれず観察された場合は，観測されたデータに対して自己回帰モデルを適応し，パラメーターを推定すればよいことになる。しかしながら，Signal Process にノイズが含まれている場合，それを無視してパラメーターを推定すると（すなわち想定誤差がある場合），推定されたパラメーターにはバイアスが生じ，さらに一致性を持たない。

観測できない Signal Process を明示的にモデルに含めた状態空間モデルは，パラメーターを推定する際，カルマンフィルターを用いた最尤推定によって行う。また，Granger and Morris（1976）では，Signal Process を自己回帰モデルとし，そのプロセスにノイズが含まれている場合，ある条件のもとでは観測されるプロセスが ARMA モデルに従うことを示しているため，ARMA モデルを推定すれば良いことになる。以上のモデルは，非線形モデルの最適化をすることによりパラメーターを推定する。

本稿では Signal Process を自己回帰モデルと想定し，そのパラメーターの推定に関して一般的な操作変数法を応用した手法を提案する。また，シミュレーション分析によって他の推定量との比較を行う。本稿の概要は以下の通りである。まず２節で問題の定式化をした後，操作変数法を使った新たな推定量を提案する。３節ではデータ分析として，１．シミュレーションによって理論的に導出した結果の確認，ならびに，２．東京証券取引所の１部上場データを用いた実証分析を行う。最後に４節で本稿のまとめと今後の課題について述べる。

2.　問題の定式化と理論的結果

本節では観測系列として以下のようなノイズ過程と１階の自己回帰（AR(1)）過程の和を考える。

$$y_t = x_t + u_t,\quad u_t \sim \text{i.i.d.N}(0,\sigma_u^2) \tag{1}$$

$$x_t = \beta x_{t-1} + \varepsilon_t,\quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0,\sigma_\varepsilon^2). \tag{2}$$

ここでは，σ_u^2 と x_t，σ_ε^2 および x_t と σ_ε^2 は独立であり，さらに時系列の定常性すなわち

＊ 広島経済大学経済学部准教授

$|\beta|<1$ を仮定する。我々が観測できるデータは $\{y_t \mid t=1,2,\ldots,T\}$ であり，推定したいパラメーターは β である。以下で，想定誤差がある場合に推定されたパラメーターは一致性を持たないこと示した後，次項で β の一致推定量を導く。

2.1　想定誤差がある場合の推定量の性質

ここでラグオペレーター $\beta(L)$ を導入し，上記の（2）式を書き換え

$$\beta(L)x_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0,\sigma_\varepsilon^2). \tag{3}$$

さらに（1）式の両辺に $\beta(L)$ をかけると以下の式となる。

$$\begin{aligned}\beta(L)y_t &= \beta(L)x_t + \beta(L)u_t \\ y_t &= \beta y_{t-1} + \varepsilon_t + u_t - \beta u_{t-1}.\end{aligned} \tag{4}$$

ここで $v_t = \varepsilon_t + u_t - \beta u_{t-1}$ として（4）式を以下のように書き換えた場合，

$$y_t = \beta y_{t-1} + v_t \tag{5}$$

一見すると（5）式は y_t の自己回帰モデルになるため，β の推定量 $\hat{\beta}$ は

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2} \tag{6}$$

となるが，この推定量は一致性がない。以下では具体的に $\hat{\beta}$ の確率極限を求める。

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2} = \frac{\sum (x_t + u_t)(x_{t-1} + u_{t-1})}{\sum (x_{t-1} + u_{t-1})^2} \\ &= \frac{\sum x_t x_{t-1} + \sum x_t u_{t-1} + \sum u_t x_{t-1} + \sum u_t u_{t-1}}{\sum x_{t-1}^2 + 2\sum x_{t-1}u_{t-1} + \sum u_{t-1}^2}.\end{aligned} \tag{7}$$

ここで各項の確率極限は以下の通りである。

$$\operatorname{plim}\sum x_t u_{t-1} / T = 0 \quad \because x_t \perp u_t, u_t \sim i.i.d.$$

$$\operatorname{plim}\sum u_t x_{t-1} / T = 0 \quad \because x_t \perp u_t, u_t \sim i.i.d.$$

$$\operatorname{plim}\sum u_t u_{t-1} / T = 0 \quad \because u_t \sim i.i.d.(0,\sigma_u^2)$$

$$\operatorname{plim}\sum u_t^2 / T = \sigma_u^2$$

よって（7）式は以下の式になる。

$$\operatorname{plim}\hat{\beta} = \frac{\operatorname{plim}\sum x_t x_{t-1}}{\operatorname{plim}\sum x_{t-1}^2 + \sigma_u^2} \tag{8}$$

さらに（8）式の各項を以下に示す。

$$\operatorname{plim}\sum x_{t-1}^2 / T = \sigma_x^2$$

$$\begin{aligned}\operatorname{plim}\sum x_t x_{t-1} / T &= \operatorname{plim}\frac{\sum (\beta x_{t-1} + \varepsilon_t) x_{t-1}}{T} \\ &= \operatorname{plim}\frac{\beta \sum x_{t-1}^2 + \sum \varepsilon_t) x_{t-1}}{T} \\ &= \beta\sigma_x^2 + \operatorname{plim}\frac{\sum \varepsilon_t x_{t-1}}{T} \\ &= \beta\sigma_x^2\end{aligned}$$

したがって $\hat{\beta}$ の確率極限は以下の通りである。

$$\operatorname{plim}\hat{\beta} = \frac{\beta\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2} = \beta\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2}\right) \tag{9}$$

以上により $\hat{\beta}$ は一致推定量ではないことが示された。また（9）式より，ノイズの分散が大きければ大きいほど，過少推定されることがわかる。次項で β の一致推定量を操作変数法によって導く。

2.2　β の一致推定量の導出

本項では β の一致推定量を一般的な操作変数法（IV）を応用し導出する。ここで用いる操作変数は

$$\hat{y}_{t-1} = \hat{\beta} y_{t-2} \tag{10}$$

とする。ここで $\hat{\beta}$ は y_t に対して AR(1) モデルを推定したときの推定値である。このときの推定量は

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum y_t \hat{y}_{t-1}}{\sum \hat{y}_{t-1}^2} \tag{11}$$

である。この推定量が一致性を持つことを示す。

$$\tilde{\beta}=\frac{\sum y_t\hat{y}_{t-1}}{\sum \hat{y}_{t-1}^2}=\frac{\hat{\beta}\sum y_t y_{t-2}}{\hat{\beta}^2\sum y_{t-2}^2}$$
$$=\frac{1}{\hat{\beta}}\frac{\sum(x_t+u_t)(x_{t-2}+u_{t-2})}{\sum(x_{t-2}+u_{t-2})^2}$$
$$=\frac{1}{\hat{\beta}}\left\{\frac{\sum x_t x_{t-2}+\sum x_t u_{t-2}+\sum u_t x_{t-2}+\sum u_t u_{t-2}}{\sum x_{t-2}^2+2\sum x_{t-2}u_{t-2}+\sum u_{t-2}^2}\right\} \tag{12}$$

ここで

$$\text{plim}\frac{\sum x_t x_{t-2}}{T}$$
$$=\text{plim}\frac{\sum(\beta x_{t-1}+\varepsilon_t)x_{t-2}}{T}$$
$$=\text{plim}\frac{\beta\sum x_{t-1}x_{t-2}}{T}+\text{plim}\frac{\sum\varepsilon_t x_{t-2}}{T}$$
$$=\text{plim}\frac{\beta\sum(\beta x_{t-2}+\varepsilon_{t-1})x_{t-2}}{T}$$
$$=\beta^2\text{plim}\frac{\sum x_{t-2}^2}{T}+\beta\text{plim}\frac{\sum\varepsilon_{t-1}x_{t-2}}{T}$$
$$=\beta^2\sigma_x^2$$

したがって

$$\text{plim}\tilde{\beta}=\text{plim}\frac{1}{\hat{\beta}}\left(\frac{\beta^2\sigma_x^2}{\sigma_{x^2}+\sigma_u^2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\beta}\frac{\sigma_x^2+\sigma_u^2}{\sigma_x^2}\right)\left(\frac{\beta^2\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_u^2}\right)$$
$$=\beta$$

以上により，本稿で提案する推定量が一致推定量であることが示された。次節では，以上の結果の確認と他の推定量との比較をシミュレーションによって行う。

3.　データ分析

本節では，はじめに Granger and Morris（1976）は AR プロセスにノイズが加わった場合，それは ARMA モデルで表現できることを示しているので，そのモデルを紹介する。次にシミュレーションによって想定誤差がある場合，すなわち（5）式を AR(1) モデルとして推定した場合に $\hat{\beta}$ は過少推定になることを確認し，その後 ARMA モデルを最尤推定法により推定し，本稿で提案する推定量との比較を行う。

さらに実証分析として，東京証券取引所 1 部上場銘柄の2003年から2009年の Realized Volatility 系列に対して，本稿で提案する推定量により推定を行う。

Granger and Morris（1976）では，ある特定の ARMA(p, q) モデルはいくつかの単純なモデルから生じているかどうかについて考察している。本稿の関心は専ら AR(1) にノイズが加わった場合に ARMA(1, 1) として考えられるかどうかにあるため，その部分を概観する。いま，$(1+a\mathbf{B})X_t=\varepsilon_t$，$Y_t=\eta_t$ とし，ε_t と η_t は互いに独立なホワイトノイズとする。$Z_t=X_t+Y_t$ とすると（4）式と同様に

$$(1+a\mathbf{B})Z_t=(1+a\mathbf{B})\eta_t+\varepsilon_t \tag{13}$$

と書き換えられる。次に以下のような ARMA(1, 1) プロセスを考える。

$$(1+c\mathbf{B})Z_t=(1+d\mathbf{B})\xi_t \tag{14}$$

ここで ξ_t はホワイトノイズ系列である。μ_0，μ_1 を（14）式における右辺の MA(1) の分散と自己共分散とすると（13）式は以下の条件もとで（14）式に表せる。

$$a=c$$
$$\mu_0=(1+d^2)\sigma_\xi^2=(1+a^2)\sigma_\eta^2+\sigma_\varepsilon^2$$
$$\mu_1=d\sigma_\xi^2=a\sigma_\eta^2$$
$$\frac{1}{1+c^2}>\frac{\rho_1}{c}\geq 0$$

ここで

$$\rho_1=\frac{\mu_1}{\mu_0}=\frac{d}{1+d^2}$$

である。これらの条件が満たされると仮定するならば，(14) 式の AR パラメーターと (13) 式の AR パラメーターは同じとなる。すなわち，この条件が満たされるならば，DGP (Data Generating Process) が AR モデルにノイズが加わった場合でも，ARMA モデルを推定すれば AR パラメーターを得ることが可能である。

3.1　シミュレーション分析

本項のシミュレーションでは (1) 式の $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ に固定し，(2) 式における β を2通り ($\beta = 0.4, 0.8$)，σ_u^2 を3通り ($\sigma_u^2 = 0.2, 0.4, 0.7$) に設定した。それぞれの β と σ_u^2 の値を組み合わせ，サンプルサイズ T のデータを生成させた (T= 20, 40, 100, 500, 800, 1000, 1500)。生成したデータに対して AR(1) モデルの推定，IV による推定，ARMA(1, 1) モデルの推定を行っている。繰り返し回数は1,000回で，推定された1,000個のパラメーターの平均および RMSE を計算した。もし推定されたパラメーターの値が DGP の β

表1　$\beta = 0.4$，$\sigma_u^2 = 0.2$ のとき

	Mean			RMSE		
T	OLS	IV	MLE	OLS	IV	MLE
20	0.078	−1.006	0.046	0.388	23.359	0.652
40	0.070	−0.138	0.060	0.366	11.629	0.667
100	0.075	1.440	0.072	0.340	36.493	0.638
500	0.076	0.605	0.228	0.327	14.337	0.491
800	0.078	0.393	0.244	0.324	1.974	0.433
1000	0.077	0.434	0.278	0.325	1.981	0.410
1500	0.076	0.607	0.335	0.325	3.556	0.323

表2　$\beta = 0.4$，$\sigma_u^2 = 0.4$ のとき

	Mean			RMSE		
T	OLS	IV	MLE	OLS	IV	MLE
20	0.119	−4.348	0.102	0.359	136.490	0.633
40	0.126	−0.290	0.123	0.314	13.912	0.609
100	0.124	0.608	0.206	0.295	13.893	0.555
500	0.129	0.365	0.336	0.275	1.324	0.358
800	0.127	0.431	0.368	0.276	0.368	0.294
1000	0.129	0.419	0.366	0.273	0.312	0.250
1500	0.129	0.409	0.396	0.273	0.202	0.200

表3　$\beta = 0.4$，$\sigma_u^2 = 0.7$ のとき

	Mean			RMSE		
T	OLS	IV	MLE	OLS	IV	MLE
20	0.162	−0.064	0.190	0.329	15.319	0.570
40	0.160	1.528	0.201	0.288	45.875	0.584
100	0.171	0.506	0.261	0.250	7.904	0.495
500	0.181	0.396	0.379	0.224	0.276	0.281
800	0.181	0.401	0.404	0.222	0.213	0.225
1000	0.182	0.407	0.404	0.221	0.183	0.198
1500	0.182	0.400	0.402	0.220	0.146	0.160

表4　$\beta = 0.8$，$\sigma_u^2 = 0.2$ のとき

	Mean			RMSE		
T	OLS	IV	MLE	OLS	IV	MLE
20	0.244	0.704	0.359	0.613	9.761	0.715
40	0.265	0.403	0.478	0.563	7.994	0.600
100	0.280	0.903	0.659	0.534	1.498	0.370
500	0.284	0.806	0.782	0.519	0.161	0.078
800	0.284	0.803	0.789	0.518	0.122	0.058
1000	0.286	0.804	0.790	0.516	0.111	0.051
1500	0.284	0.807	0.794	0.517	0.088	0.039

表5　$\beta = 0.8$，$\sigma_u^2 = 0.4$ のとき

	Mean			RMSE		
T	OLS	IV	MLE	OLS	IV	MLE
20	0.366	0.695	0.477	0.498	6.165	0.602
40	0.390	0.759	0.606	0.446	1.720	0.444
100	0.405	0.755	0.729	0.413	1.038	0.226
500	0.418	0.801	0.790	0.385	0.089	0.058
800	0.419	0.798	0.794	0.383	0.069	0.044
1000	0.421	0.798	0.796	0.380	0.059	0.038
1500	0.422	0.798	0.796	0.380	0.052	0.031

表6　$\beta = 0.8$，$\sigma_u^2 = 0.7$ のとき

	Mean			RMSE		
T	OLS	IV	MLE	OLS	IV	MLE
20	0.475	0.605	0.586	0.403	3.422	0.486
40	0.484	0.772	0.676	0.361	0.755	0.336
100	0.509	0.797	0.761	0.312	0.234	0.140
500	0.526	0.796	0.793	0.279	0.065	0.050
800	0.527	0.800	0.797	0.276	0.051	0.039
1000	0.526	0.798	0.797	0.276	0.045	0.033
1500	0.528	0.799	0.797	0.274	0.035	0.027

に一致しているのであれば，RMSE は0となる。すなわち RMSE は値が小さいほど真のパラメーターを推定したと言える。以上の表1～表6が得られた結果である。

シミュレーションの結果，（9）式で示しているように，AR(1) モデルの OLS は，真のパラメータがいかなる場合でも，サンプル数に関係なく過少推定されることが分かる。推定値の平均でみると，ARMA モデルの推定値と IV の推定値はほぼ同じである。また，RMSE で評価をすると，若干 ARMA モデルが良いことが分かる。しかしながら，IV の推定時間は ARMA モデルに比べて圧倒的に早く，時間的にみると有利な推定量であることも判明した。

3.2 実証分析

これまでにも金融時系列データのボラティリティ分析は，GARCH モデル，Stochastic Volatility モデルなどの研究が数多く存在する。近年では，高頻度データが一般的に利用可能となり，ボラティリティの推定量として日中リターンの2乗を足し合わせた Realized Volatility（RV）も使われるようになってきた。いま，日中に n 個の収益率データ $\{r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n}, \ldots, r_t\}$ があるとき，第 t 日の RV である RV_t は以下の式で定義される。

$$RV_t = \sum_{i=1}^{n} r_{t-1+i/n}^2$$

RV の計算自体はモデルフリーで行われるが，RV の時系列特性を分析するためには，何らかのモデルを仮定することになる。どのように RV をモデル化するかについても数多くの研究があり，その一つに UC（Unobserved Component）モデルがある[2)]。このモデルを使った最も単純なケースとしては，RV 系列のデータは真のボラティリティに誤差が加わってしか観察できないとすることができる。本項では東京証券取引所1部上場の1,664銘柄について2003年3月1日から2009年12月30日までのデータから RV を計算し，その対数の値に対して以下のモデルを IV によって推定した。

$$LRV_t = \ln(RV_t)$$
$$LRV_t = x_t + u_t, \quad u_t \sim \text{i.i.d.N}(0, \sigma_u^2)$$
$$x_t = \beta x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

（10）式，（11）式より，β の一致推定量 $\tilde{\beta}$ は以下の式である。

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum LRV_t LRV_{t-2}}{\hat{\beta}\sum LRV_{t-2}^2}$$

ここで $\hat{\beta}$ は LRV 系列に AR(1) モデルの推定したときの推定値である。実証分析では市場全体に対する一般的な傾向を見るために，各銘柄の推定値を集計した。その結果が表7である。

この表からほとんどの銘柄が単位根に近い値であることが分かる。さらに23銘柄が $\tilde{\beta} \geq 1$ となった。すなわち x_t をノイズを含まない真のボラティリティと考えるならば，23銘柄に関してはボラティリティは発散することになり，ボラティリティの予測は困難になる。

4. おわりに

本稿では，Signal Process を AR(1) とし，そのプロセスとホワイトノイズの和からなる時系

表7　$\tilde{\beta}$ の統計量

平　均	標準誤差	標準偏差	最　小	最　大	標本数
0.980544	0.000953	0.038855	0.142615	1.85013	1,664
	$\tilde{\beta}<0.7$	$0.7<\tilde{\beta}\leq 0.8$	$0.8<\tilde{\beta}\leq 0.9$	$0.9<\tilde{\beta}<1$	$\tilde{\beta}\geq 1$
銘柄数	1	2	12	1,626	23

列モデルの一致推定量を提案した。はじめに想定している時系列データに AR(1) モデルをあてはめると，その推定量は一致性を持たないことを示した後，一般的な操作変数法を使った新たな推定量を提案し，その推定量が一致性を持つことを証明した。

次に本稿で提案する推定量と他の推定量の比較のためにシミュレーション分析を行った。本稿で想定しているモデルは Granger and Morris（1976）によって条件が満たされれば ARMA(1, 1) モデルで表現可能であることが示されているので比較のための推定量としては ARMA(1, 1) モデルの最尤推定量としている。シミュレーションの結果，推定値の平均でみると，ARMA モデルの推定値と IV の推定値はほぼ同じであり，RMSE で評価をすると，若干 ARMA モデルが良いという結果を得た。計算時間自体は IV 推定法の方が圧倒的に早いため，ARMA モデルを推定する際の初期値を設定するために IV 推定法を用いるという利用方法が考えられる。

最後に実証分析として，東京証券取引所のデータを用いて RV を計算し，RV 系列に対して IV 推定を行った。この分析は，観察される RV 系列のデータは真のボラティリティにノイズが含まれているという想定のもと，真のボラティリティの時系列特性を分析しようとしている。実証結果として，ほとんどの銘柄の真のボラティリティは単位根に近い値をとり，23銘柄については，ボラティリティが発散する可能性があるという結果を得ている。しかしながら，想定しているモデルはもっとも単純な場合であるため，この点に関しては，さらなる検討が必要である。

今後の方向性としては，Signal Process を AR(1) 以外の他のモデルへ変更や本稿で提案した推定量の漸近展開などが考えられる。

本研究は広島経済大学共同研究08-A，および，文部科学省科学研究費補助金「ファイナンス時系列における「発展モデル」の開発と統計的推測」の助成を受けている。本研究を進める上で本学の前川功一教授，ならびに関西学院大学の永田修一助手より，研究の成立に不可欠な多くの助言を頂き，ここに記して感謝する。

注

1）　Nagakura and Watanabe（2010）
2）　RV のモデル化に関しては渡部（2007）を参照

参　考　文　献

Wayne A. Fuller (1996) *Introduction to Statistical Time Series* Jhon Wiley & Sons, inc., New Jersey.

William H. Greene (2008) *Econometric Analysis* Prentice Hall, New Jersey.

Granger, C .W. J. and M. J. Morris (1976) “Time Series Modelling and Interpretation,” *Journal of Royal Statistics Society A*, 139, 246–257.

Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis* Princeton University Press, New Jersey.

Katsuto Tanaka (2002) “A UNIFIED APPROACH TO THE MEASUREMENT ERROR PROBLEM IN TIME SERIES MODELS,” *Econometric Theory*, 18, 278–96.

Daisuke Nagakura and Toshiaki Watanabe (2010) “A State Space Approach to Estimating the Integrated Variance under the Existence of Market Microstructure Noise,” *Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series*, No. 115.

谷崎久志（1993）『状態空間モデルの経済学への応用：可変パラメータ・モデルによる日米マクロ計量モデルの推定』日本評論社.

渡部敏明（2000）『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明（2007）“Realized Volatility–サーベイと日本の株式市場への応用,”『経済研究』Vol. 58, No. 4, 352–373.