広島経済大学経済研究論集
第34巻第1号　2011年6月

最適制御問題における保存則の新しい導出法とその枯渇性資源を含む最適資産蓄積モデルへの応用

三村　文武*・藤原富美代**・濃野　隆之***

は　じ　め　に

1970年，サミュエルソン[1] は保存則を初めて理論経済学に明示的に導入し「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は一定である」という力学的エネルギー保存則との類似に注目し，すべての産出物がシステムの成長のための資本形成に供されるような新古典派的フォン・ノイマン型経済成長モデルにおいて「総産出－総資本比は一定である」という保存則を導出した。又，濃野[2] はリーの理論[3] の理論経済学への応用を提唱し，その例証として生産関数のリー変換群の下での対称性（不変性）に基づいて，中立型技術変化の完全なリストを完成させた。

古典力学においては，リー変換群の下での作用積分の対称性（不変性）に基づくネータの定理[4] および発散項を伴うその一般化[5] は，ラグランジュ（又はハミルトン）構造から保存則を発見する上で重要な役割を果たしてきた。一方，カビグリア[6, 7] は新たな変数を付加した高次元の空間での変分原理を利用して，ラグランジュ（又はハミルトン）構造を用いない保存則の新しい導出法を見出した。その後，三村－濃野[8] はネーターよりもより一般的であるこのカビグリアの手法を更に考察・発展させ，与えられた力学系の保存則を導出する効果的な手法として確立し，動力学および経済動学の種々のモデルにおける保存則の導出とそれらのモデルの動学的性質の解明に応用した。我々は前稿[9] でその手法を特に新古典派的経済成長理論への応用に焦点を絞って紹介したが，続く本稿では枯渇性資源を含む最適資産蓄積問題への応用について考察する。

本稿を通して各項の繰り返し現れる同じ添字については総和をとるという和の規約を採用し，関数は必要な階まで微分可能とする。

1.　保存則導出の新しい手法

資産蓄積の最適化を論じる前に，その源となる最適制御問題における保存則導出の新しい手法を紹介する。変数 $q=(q^{\alpha}(t))$，$\dot{q}=(\dot{q}^{\alpha}(t))=(dq^{\alpha}/dt)$，$\ddot{q}=(\ddot{q}^{\alpha}(t))=(d^2q^{\alpha}/dt^2)$ $(\alpha=1,\cdots,m)$ に関する2階の微分方程式系

$$(1.1)\qquad F^{\alpha}(\ddot{q},\dot{q},q,t)=0$$

の解上で

$$(1.2)\qquad \frac{d\Omega(\dot{q},q,t)}{dt}\equiv\dot{\Omega}=0$$

(d/dt は t についてのトータル微分：$d/dt=\ddot{q}^{\alpha}\partial/\partial\dot{q}^{\alpha}+\dot{q}^{\alpha}\partial/\partial q^{\alpha}+\partial/\partial t$) を満たす$\Omega$を(1.1)の保存量，(1.2)を保存則と呼ぶ。(1.1)がオイラー-ラグランジュ方程式系（E-L 方程式系）であることを仮定しない保存量の構成法を，ここでは前稿と同様に特に $L(\dot{q},q,t)$ をラグランジアンとする E-L 方程式系

$$(1.3)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}=\ddot{q}^{\beta}W_{\alpha\beta}+\dot{q}^{\beta}\frac{\partial^2L}{\partial\dot{q}^{\alpha}\partial q^{\beta}}$$

* 広島経済大学経済学部教授
** 北九州市立大学国際環境工学部講師
*** 福岡教育大学名誉教授
(Received, March 11, 2011)

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0$$

$(W_{\alpha\beta}=\partial^2 L/\partial\dot{q}^\alpha\partial\dot{q}^\beta)$ であるとして，次の定理を挙げる[10)]：

定理1．ラグランジアン $L(\dot{q},q,t)$ に対して，関数 $\xi_\mu^\alpha(\dot{q},q,t)$ $(\alpha=1,\cdots,m;\ \mu=1,2)$ が E-L 方程式系(1.3)の解上で

(1.4)
$$W_{\alpha\beta}\frac{d^2\xi_\mu^\beta}{dt^2}+\left(\frac{dW_{\alpha\beta}}{dt}+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial q^\beta}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\beta\partial q^\alpha}\right)\frac{d\xi_\mu^\beta}{dt}+\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial q^\beta}\right)-\frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\right)\xi_\mu^\beta=0$$

を満たすとする。このとき E-L 方程式系(1.3)の保存量が次のように構成される：

(1.5)
$$\Omega=W_{\alpha\beta}\left(\xi_1^\alpha\frac{d\xi_2^\beta}{dt}-\xi_2^\beta\frac{d\xi_1^\alpha}{dt}\right)+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial q^\beta}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\beta\partial q^\alpha}\right)\xi_1^\alpha\xi_2^\beta$$

この定理は次の有限 $(0<T<\infty)$ 又は無限 $(T=\infty)$ 区間における積分

(1.6)
$$\int_0^T e^{-\rho t}U(x,y,u)dt \qquad (\rho:\text{const.})$$

の，拘束条件（束縛条件）

(1.7)
$$\dot{x}^\mu=f^\mu(x,u)$$

(1.8)
$$\dot{y}^i=e^{-\rho t}g^i(u)$$

のもとでの極値問題に適用することができる。ここに $x=(x^\mu(t))$ $(\mu=1,\cdots,k)$ と $y=(y^i(t))$ $(i=1,\cdots,n)$ は状態変数，$u=(u^\sigma(t))$ $(\sigma=1,\cdots,\ell)$ は制御変数である。この極値問題のラグランジアンは π_μ,λ_i をラグランジュ乗数として

$$L=e^{-\rho t}U+\pi_\mu(\dot{x}^\mu-f^\mu)+\lambda_i(\dot{y}^i-e^{-\rho t}g^i)$$

で与えられ，その E-L 方程式系は(1.7)，(1.8)及び次の方程式系から成る：

(1.9a)
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=0:$$
$$e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial x^\mu}=\dot{\pi}_\mu+\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu}\pi_\nu$$

(1.9b)
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial y^i}=0:$$
$$e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial y^i}=\dot{\lambda}_i$$

(1.9c)
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{u}^\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial u^\sigma}=0:$$
$$e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial u^\sigma}=\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\sigma}\pi_\mu+e^{-\rho t}\frac{\partial g^i}{\partial u^\sigma}\lambda_i$$

この極値問題における保存量（第一積分）は，定理1における変数 (q^α) を $(q^\alpha)=(\pi_\mu,\lambda_i,x^\mu,y^i,u^\sigma)$ $(\alpha=1,\cdots,m=2k+2n+\ell)$ とおいて，次のように構成される[11,12)]：

定理2．変数 $\dot{q}^\alpha,q^\alpha,t$ の関数 $(\xi_1^\alpha)=(\eta_\mu^1,\zeta_i^1,\varphi_1^\mu,\psi_1^i,\tau_1^\sigma)$ と $(\xi_2^\alpha)=(\eta_\mu^2,\zeta_i^2,\varphi_2^\mu,\psi_2^i,\tau_2^\sigma)$ が，拘束条件(1.7)，(1.8)の下での(1.6)の極値問題における最適経路上，即ち E-L 方程式系の解上で次の方程式系を満たすとする：

(1.10a)
$$\frac{d\varphi^\mu}{dt}=\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}\varphi^\nu+\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\sigma}\tau^\sigma$$

(1.10b)
$$\frac{d\psi^i}{dt}=e^{-\rho t}\frac{\partial g^i}{\partial u^\sigma}\tau^\sigma$$

(1.10c)
$$\frac{d\eta_\mu}{dt}+\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu}\eta_\nu+\pi_\nu\left(\frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x^\kappa\partial x^\mu}\varphi^\kappa+\frac{\partial^2 f^\nu}{\partial u^\sigma\partial x^\mu}\tau_\sigma\right)=e^{-\rho t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\varphi^\nu+\frac{\partial^2 U}{\partial y^i\partial x^\mu}\psi^i+\frac{\partial^2 U}{\partial u^\sigma\partial x^\mu}\tau^\sigma\right)$$

(1.10d)
$$\frac{d\zeta_i}{dt}=e^{-\rho t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^\mu\partial y^i}\varphi^\mu+\frac{\partial^2 U}{\partial y^j\partial y^i}\psi^j+\frac{\partial^2 U}{\partial u^\sigma\partial y^i}\tau^\sigma\right)$$

(1.10e)
$$\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\sigma}\eta_\mu+\pi_\mu\left(\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\nu\partial u^\sigma}\varphi^\nu+\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial u^\omega\partial u^\sigma}\tau^\omega\right)+e^{-\rho t}\left(\frac{\partial g^i}{\partial u^\sigma}\zeta_i+\lambda_i\frac{\partial^2 g^i}{\partial u^\omega\partial u^\sigma}\tau^\omega\right)$$

$$=e^{-\rho t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^\mu \partial u^\sigma}\varphi^\mu+\frac{\partial^2 U}{\partial y^i \partial u^\sigma}\psi^i+\frac{\partial^2 U}{\partial u^\omega \partial u^\sigma}\tau^\omega\right)$$

このとき次の保存量 Ω が構成される：

(1. 11)　$$\Omega=\eta_\mu^2\varphi_1^\mu-\eta_\mu^1\varphi_2^\mu+\zeta_i^2\psi_1^i-\zeta_i^1\psi_2^i$$

この定理における解 (ξ^α) として，(1) $U=U(x, u)$ のとき，(2) $f^\mu(x, u)$ と $g^i(u)$ が１次の同次関数で $U(x, y, u)$ が r 次の同次関数のとき，(3) $U=-\alpha_i g^i(u)$ (α_i: const.) のとき，それぞれ次の (ξ_1^α)，(ξ_2^α)，(ξ_3^α) が得られる：

$$\left(\xi_1^\alpha\right)=(\dot{\pi}_\mu+\rho\pi_\mu, 0, \dot{x}^\mu \dot{y}^i+\rho y^i, \dot{u}^\sigma)$$

$$\left(\xi_2^\alpha\right)=((r-1)\pi_\mu,(r-1)\lambda_i, x^\mu, y^i, u^\sigma)$$

$$\left(\xi_3^\alpha\right)=(\pi_\mu, \lambda_i+\alpha_i, 0,\cdots,0)$$

これらの解の組 (ξ_1^α, ξ_2^α) 又は (ξ_1^α, ξ_3^α) を(1. 11)に代入して次の保存量が構成される[13)]：

定理３．拘束条件(1. 7)，(1. 8)の下での(1. 6)の極値問題において，(1) $f^\mu(x, u)$ と $g^i(u)$ が１次の同次関数で U が変数 y を持たない r 次の同次関数 $U=U(x, u)$ のとき，(2) U が $U=-\alpha_i g^i(u)$ (α_i: const.) のとき，それぞれ次の保存量が存在する：

(1. 12)　$$\Omega_1=(r-1)(\pi_\mu\dot{x}^\mu+\lambda_i(\dot{y}^i+\rho y^i)) -(\dot{\pi}_\mu+\rho\pi_\mu)x^\mu$$

(1. 13)　$$\Omega_2=\pi_\mu\dot{x}^\mu+\lambda_i(\dot{y}^i+\rho y^i)+\alpha_i(\dot{y}^i+\rho y^i)$$

$U=-\alpha_i g^i(u)$ のとき(1. 9b)より λ は定数となる。従って(1. 13)の右辺の２項は(1. 8)よりそれぞれ次のように書きかえられる（等号は定数を除いて成立）：

$$\lambda_i(\dot{y}^i+\rho y^i)=e^{-\rho t}\lambda_i g^i(u(t)) +\rho\int_0^t e^{-\rho s}\lambda_i g^i(u(s))ds =\int_0^t e^{-\rho s}\lambda_i \dot{g}^i(u(s))ds$$

$$\alpha_i(\dot{y}^i+\rho y^i)=e^{-\rho t}\alpha_i g^i(u(t)) +\rho\int_0^t e^{-\rho s}\alpha_i (g^i(u(s))ds =\int_0^t e^{-\rho s}\alpha_i \dot{g}^i(u(s))ds$$

これより，f^μが t を陽に含む，即ち $f^\mu=f^\mu(x, u, t)$ の場合，定理３における Ω_2より次の保存量を予測することができる：

(1. 14)　$$\Omega=\pi_\mu\dot{x}^\mu+\int_0^t\left(e^{-\rho s}(\lambda_i+\alpha_i)\dot{g}^i(u(s)) -\pi_\mu(s)\frac{\partial f^\mu(x(s), u(s), s)}{\partial s}\right)ds$$

実際，$U=-\alpha_i g^i(u)$ のとき，(1. 9a)，(1. 9c)はそれぞれ

$$\dot{\pi}_\mu+\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu}\pi_\nu=0$$

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\sigma}\pi_\mu+e^{-\rho t}(\lambda_i+\alpha_i)\frac{\partial g^i}{\partial u^\sigma}=0$$

となる。２式にそれぞれ $\dot{x}^\mu$ と $\dot{u}^\sigma$ を掛けて和をとると

$$\dot{\pi}_\mu\dot{x}^\mu+e^{-\rho t}(\lambda_i+\alpha_i)\dot{g}^i =-\pi_\mu\left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}\dot{x}^\nu+\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\sigma}\dot{u}^\sigma\right)$$

が得られる。これと $\ddot{x}^\mu=\dot{f}^\mu$ を(1. 14)の t についてのトータル微分 $\dot{\Omega}$ に代入して $\dot{\Omega}=0$ となることを確かめることができる：

$$\dot{\Omega}=\pi_\mu\ddot{x}^\mu+\dot{\pi}_\mu\dot{x}^\mu+e^{-\rho t}(\lambda_i+\alpha_i)\dot{g}^i-\pi_\mu\frac{\partial f^\mu}{\partial t} =\pi_\mu\left(\dot{f}^\mu-\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}\dot{x}^\nu-\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\sigma}\dot{u}^\sigma-\frac{\partial f^\mu}{\partial t}\right)=0$$

2.　最適資産蓄積問題

ハートウィック[14, 15)]はソロー[16)]の提起した最適資産蓄積問題のモデルに内在する蓄積－投資ルール（ハートウィックのルール）を見い出し，これと共にホテリング[17)]のルールが成立す

るとき，消費が一定になることを導いた。後に，佐藤－キム[18] はこれを，単一の枯渇性資源を含む資産の場合について，内生的に消費を一定にするような最小化問題として考察し，ネーターの保存則を経由してハートウィックのルールが得られることを示した。我々は更にこの問題を多数の枯渇性資源を含む資産の場合について，特別な場合に一定となるような指数的に変化する消費の内在するモデルを考察し，上記の二つのルールを一般化する（単一資源の場合は注の論文[19] を参照)。

$R=(R^i(t))$ をストック $S=(S^i(t))$ を持つ n 種の枯渇性資源 $(i=1,\cdots,n)$，$K(t)$ を再生産可能な資産，$C(t)$ を $\gamma=0$ のとき定数となる指数的に変化する消費

(2.1)　$C(t)=ce^{\gamma t}\quad (c,\gamma\text{: const.})$

とし，有限 $(0<T<\infty)$ 又は無限 $(T=\infty)$ 区間における積分

(2.2)　$\displaystyle\int_0^T e^{-\rho t}\alpha_i R^i dt\quad (\alpha_i\text{: const.})$

の最小化問題を，拘束条件

(2.3)　$\dot{K}=F(K,R,C)$

(2.4)　$\dot{S}^i=-e^{-\rho t}R^i$

のもとで考察する。ここに ρ は定割引率である。

注意１．注の論文[20] では一定消費の場合を考察している。又，束縛条件(2.3)のかわりに $d(e^{-\rho t}K)/dt=F(K,R,C)$，即ち $\dot{K}=F(K,R,C)+\rho K$ を用いているが，その右辺 $F+\rho K$ を改めて F とおけば(2.3)の形となる。

定理３における変数をそれぞれ $x=K$, $y=S$, $u=R$; 関数をそれぞれ $f(x,\ u,\ t)=F(K,\ R,\ C)$, $g^i(u)=-R^i$, $U(u)=\alpha_i R^i\,(=-\alpha_i g^i)$ とおく。このとき，ラグランジアン

$$L=e^{-\rho t}\alpha_i R^i+\pi(\dot{K}-F)+\lambda_i(\dot{S}+e^{-\rho t}R^i)$$

に対して(1.9a)，(1.9b)，(1.9c)に対応する方程式はそれぞれ

(2.5a)　$\dot{\pi}=-\pi F_K$

(2.5b)　$\dot{\lambda}_i=0$

(2.5c)　$\lambda_i+\alpha_i=e^{\rho t}\pi F_{R^i}$

となる。ここに $F_K=\partial F/\partial K$，$F_{R^i}=\partial F/\partial R^i$ である（以後同様に添字により偏微分を表す)。

(2.5b)より λ_i は一定，従って(2.5c)の左辺は一定であり，$F_{R^i}\neq 0\ \ (i=1,\cdots,n)$ のとき次の保存量が得られる：

(2.6)　$\displaystyle\Omega_j^i=\frac{F_{R^i}}{F_{R^j}}=\frac{\lambda_i+\alpha_i}{\lambda_j+\alpha_j}=\text{const.}$

また(2.5c)の t についてのトータル微分 $(=0)$ の $\dot{\pi}$ に(2.5a)を代入すると

$$\pi\dot{F}_{R^i}+(\rho\pi+\dot{\pi})F_{R^i}=\pi(\dot{F}_{R^i}+\rho F_{R^i}-F_K F_{R^i})=0$$

となり，これより次の一般化されたホテリングのルールが得られる：

(2.7)　$\displaystyle F_K-\rho=\frac{\dot{F}_{R^1}}{F_{R^1}}=\cdots=\frac{\dot{F}_{R^n}}{F_{R^n}}$

このルールには

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F_{R^i}}{F_{R^j}}\right)=\frac{\dot{F}_{R^i}F_{R^j}-\dot{F}_{R^j}F_{R^i}}{F_{R^j}^2}=0$$

より保存量(2.6)が潜在している。他方，保存量(1.14)は

(2.8)　$\displaystyle\Omega=\pi\dot{K}-(\lambda_i+\alpha_i)\int_0^t e^{-\rho s}\dot{R}^i(s)ds$

$$-\gamma\int_0^t \pi(s)C(s)F_C(s)ds$$

となる。ここに $F(s)=F(K(s),\ R(s),\ C(s))$ である。これは拘束条件(2.4)より得られる等式（等号は定数を除いて成立)

$$\int_0^t e^{-\rho s}\dot{R}^i(s)ds = e^{-\rho t}R^i(t)+\rho\int_0^t e^{-\rho s}R^i(s)ds$$
$$= e^{-\rho t}R^i(t)-\rho S^i(t)$$

により次のように書きかえられる：

(2.8)′ $$\Omega = \pi\dot{K}-(\lambda_i+\alpha_i)(e^{-\rho t}R^i-\rho S^i) -\gamma\int_0^t \pi(s)C(s)F_C(s)ds$$

更に(2.8)又は(2.8)′より得られる保存量 $\Omega_j \equiv \Omega/(\lambda_j+\alpha_j)$ は(2.5c)と(2.6)によりそれぞれ次のように書きかえられる：

(2.9) $$\Omega_j = \frac{1}{F_{R^j}}\left(e^{-\rho t}\dot{K}-F_{R^i}\int_0^t e^{-\rho s}\dot{R}^i(s)ds\right) -\gamma\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{F_{R^j}(s)}ds$$

(2.9)′ $$\Omega_j = \frac{1}{F_{R^j}}\left(e^{-\rho t}\dot{K}-F_{R^i}(e^{-\rho t}R^i-\rho S^i)\right) -\gamma\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{F_{R^j}(s)}ds$$

最後に(2.6)より得られる $\Omega_j^i\, F_{R^j}=F_{R^i}$（$j$ について和をとらない）と，これより得られる等式

$$F_{R^i}\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{F_{R^i}(s)}ds = F_{R^j}\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{F_{R^j}(s)}ds$$

（i, j について和をとらない）を用いて Ω_j のいずれか１つ，たとえば Ω_1は次の一般化されたハートウィックのルールに書きかえられる：

(2.10) $$\dot{K} = e^{\rho t}F_{R^i}\left(\int_0^t e^{-\rho s}\dot{R}^i(s)ds +\frac{\gamma}{n}\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{F_{R^i}(s)}ds + A^i\right)$$

(2.10)′ $$\dot{K} = e^{\rho t}F_{R^i}\left(e^{-\rho t}R^i-\rho S^i +\frac{\gamma}{n}\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{F_{R^i}(s)}ds + A^i\right)$$

ここに $A^i=\Omega_1\Omega_i^1/n$ は定数である。

注意２．$C(t)=ce^{\gamma t}$ が一定消費，即ち $\gamma=0$ のときは得られた上記の等式において $F_C=0$ とすればよい。このとき，更に $f(K, R)$ を生産関数，a^i を採掘や抽出等に関する定数として

$$F(K, R, C)=f(K, R)-a_iR^i-C \quad (a^i\text{: const.})$$

とおき，$\rho=0$ とすると，(2.10)′ はハートウィックの IRR（Investment Resource Rents）ルール[21]

$$\dot{K}=(f_{R^i}-a_i)(R^i+A^i) \quad (A^i\text{: const.})$$

となる。

逆に，保存量(2.6)が潜在している一般化されたホテリングのルール(2.7)と，(2.6)の下で(2.9)が保存量であることと同値な一般化されたハートウィックのルール(2.10)を仮定する。このとき，(2.9)のトータル時間微分が零，即ち $\dot{\Omega}_j=0$ より得られる式

(2.11) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{K}}{F_{R^j}}\right)-\frac{\rho\dot{K}+F_{R^i}\dot{R}^i+\gamma CF_C}{F_{R^j}}=0$$

における最初の微分の項は，(2.7)を $\dot{F}_{R^j}=(F_K-\rho)F_{R^j}$ として代入すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{K}}{F_{R^j}}\right)=-\frac{F_{R^j}\ddot{K}-\dot{F}_{R^j}\dot{K}}{F_{R^j}^2}=\frac{\ddot{K}-(F_K-\rho)\dot{K}}{F_{R^j}}$$

となり，従って(2.11)は

(2.12) $$\ddot{K}=F_{R^i}\dot{R}^i+F_K\dot{K}+rCF_C$$

となる。これと(2.3)の t についてのトータル微分

$$\ddot{K}=F_{R^i}\dot{R}^i+F_K\dot{K}+F_C\dot{C}$$

より $F_C(\dot{C}-rC)=0$，従って $F_C\neq 0$ のとき，$\dot{C}=rC$ を積分して $C(t)$ は(2.1)の形の指数曲線となる。

次に，ルール(2.6)の下で消費が指数曲線(2.1)に従うとする。このとき，拘束条件(2.3)

のトータル時間微分は(2. 12)の形となる。これを(2. 11)の左辺（即ち $e^{\rho t}\dot{\Omega}_j$ ）に代入して $F^2_{R^j}$ を乗じると

$$e^{\rho t}F^2_{R^j}\dot{\Omega}_j$$
$$=F_{R^j}\ddot{K}-\dot{F}_{R^j}\dot{K}-\rho\dot{F}_{R^j}\dot{K}-F_{R^j}F_{R^i}\dot{R}^i-rCF_{R^j}F_C$$
$$=((F_K-\rho)F_{R^j}-\dot{F}_{R^j})\dot{K}+(\dot{C}-rC)F_{R^j}F_C$$
$$=((F_K-\rho)F_{R^j}-\dot{F}_{R^j})\dot{K}$$

（j について和をとらない）となる。これより一般化されたルール(2. 7)と $\dot{\Omega}_j=0$，従って(2. 10)は(2. 1)とルール(2. 6)の下で同値となる。

定理４．拘束条件(2. 3)と(2. 4)の下での積分(2. 2)の最小化問題において，(2. 3)における F は $F_{R^i}F_C\neq 0$ $(i=1,\cdots,n)$ を満たしているとする。このとき，消費が(2. 1)の形の指数曲線に従うならば，保存量(2. 6)の潜在する一般化されたホテリングのルール(2. 7)と，(2. 6)の下で(2. 9)（これは(2. 9)′ と同値）が保存量であることと同値な一般化されたハートウィックのルール(2. 10)（これは（2. 10)′ と同値）が存在する。又，これら２つのルールは(2. 1)と(2. 6)の下で同値となる。逆に，これら２つのルールが成立するとき，消費は(2. 1)の指数曲線に従う。

注意３．(2. 5a)を $\dot{\pi}/\pi=-F_K$ として積分すると $\pi=Ae^{-\int_0^t F_K(s)ds}$ (A: const.) となり，従って(2. 5c)は $\lambda_i+\alpha_i=Ae^{\rho t-\int_0^t F_K(s)ds}F_{R^i}$ となる。これらを(2. 8)，(2. 8)′ から得られる保存量 $\Omega_0\equiv\Omega/A$ に代入することにより，それぞれ次のラグランジュ乗数を含まない保存量 Ω_0 が得られる：

$$\Omega_0=e^{-\int_0^t F_K(s)ds}\left(\dot{K}-e^{\rho t}F_{R^i}\int_0^t e^{\rho s}\dot{R}^i ds\right)$$
$$-\gamma\int_0^t e^{-\int_0^t F_K(s)ds}C(s)F_C(s)ds$$

$$\Omega_0=e^{-\int_0^t F_K(s)ds}\left(\dot{K}-e^{\rho t}F_{R^i}(e^{-\rho t}R^i-\rho S^i)\right)$$
$$-\gamma\int_0^t e^{-\int_0^t F_K(s)ds}C(s)F_C(s)ds$$

定理３の（2）の場合に注目して，考察の問題における関数 $R^i(t)$ を $R=(R^i(t))$ の任意関数 $G^i(R)$ に置きかえ，積分

$$\int_0^T e^{-\rho t}\alpha_i G^i(R)dt$$

の拘束条件

$$\dot{K}=F(K,R,C)$$

$$\dot{S}^i=-e^{-\rho t}G^i(R)$$

の下での最小化問題に一般化する。このとき，(2. 5a)と(2. 5b)はそのままであるが(2. 5c)は

$$(\lambda_i+\alpha_i)G^i_{R^k}=\pi e^{\rho t}F_{R^k}$$

に置きかわる。$\det(\partial G^i/\partial R^j)\neq 0$ として $\lambda_i+\alpha_i$ を逆行列 $(G_{ij})=(\partial G^i/\partial R^j)^{-1}$ を用い $H_i=F_{R^k}G_{ki}$ とおいて表すと

$$\lambda_i+\alpha_i=\pi e^{\rho t}H_i$$

となる。これと，等式（等号は定数を除いて成立）

$$\int_0^t e^{-\rho s}\dot{G}^i(s)ds=e^{-\rho t}G^i(t)-\rho S^i(t)$$

により，(2. 8)又は(2. 8)′ の Ω に対して上記の置きかえをして得られる保存量 $\Omega_j\equiv\Omega/(\lambda_j+\alpha_j)$ からそれぞれ次の保存量が得られる：

$$\Omega_j=\frac{1}{H_j}\left(e^{-\rho t}\dot{K}-H_i\int_0^t e^{-\rho s}\dot{G}^i(s)ds\right)$$
$$-\gamma\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{H_j(s)}ds$$

$$\Omega_j = \frac{1}{H_j}\left(e^{-\rho t}\dot{K} - H_i(e^{-\rho t}G^i - \rho S^i)\right)$$
$$-\gamma\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{H_j(s)}ds$$

これらの式は，$\Omega_i^1 = H_1/H_i$，$A^i = \Omega_1\Omega_i^1/n$ (A^i: const.)，とおくと，たとえば Ω_1 は次の更に一般化されたハートウィックのルールとなる：

$$\dot{K} = e^{\rho t}H_i\left(\int_0^t e^{-\rho s}\dot{G}^i(s)ds + \frac{\gamma}{n}\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{H_i(s)}ds + A^i\right)$$

$$\dot{K} = e^{\rho t}H_i\left(e^{-\rho t}G^i - \rho S^i + \frac{\gamma}{n}\int_0^t e^{-\rho s}\frac{C(s)F_C(s)}{H_i(s)}ds + A^i\right)$$

3.　資産蓄積問題における最適経路

資産蓄積問題における最適経路を決定するため，拘束条件(2.3)の $F(K, R, C)$ を指数曲線に従う消費 $C = ce^{\gamma t}$ を持つ次の形の関数とする：

(3.1)　$$F(K,R,C) = f(K,R) + \rho K - ce^{\gamma t}$$

ここに $f(K, R)$ は R^i と K に関して１次同次の生産関数とする（必要なら f を $f - \alpha_i R^i$ に置きかえてもよい）。このとき，一般化されたホテリングのルール(2.7)は

(3.2)　$$f_K = \frac{\dot{f}_{R^1}}{f_{R^1}} = \cdots = \frac{\dot{f}_{R^n}}{f_{R^n}}$$

となる。１次同次の条件式 $f = f_{R^i}R^i + f_K K$ の t についてのトータル微分

$$\dot{f} = \dot{f}_{R^i}R^i + \dot{f}_K K + f_{R^i}\dot{R}^i + f_K\dot{K}$$
$$= \dot{f}_{R^i}R^i + \dot{f}_K K + \dot{f}$$

より得られる $\dot{f}_{R^i}R^i + \dot{f}_K K = 0$ に(3.2)を $\dot{f}_{R^i} = f_K f_{R^i}$ として代入すると

(3.3)　$$\frac{\dot{f}_K}{f_K} = -\frac{f_{R^i}R^i}{K}$$

となる。更に(3.1)における生産関数 f を

$$f(K,R) = K^{1-\tau}\Phi(R)$$

とおく。ここに Φ は R^i に関して τ $(\tau \neq 0, 1)$ 次の同次関数とする。従って f は R^i と K に関して１次の同次関数となる。

$$f_{R^i}R^i = K^{1-\tau}\Phi_{R^i}R^i = \tau K^{1-\tau}\Phi = \tau f$$

より(3.3)は

(3.4)　$$\frac{\dot{f}_K}{f_K} = -\frac{\tau f}{K}$$

となる。又，f の１次同次の条件式は

$$f_K K = f - f_{R^i}R^i = (1-\tau)f$$

となり，その t についてのトータル微分は

$$\dot{f}_K K + f_K\dot{K} = (1-\tau)\dot{f}$$

となる。これらの２式より $1-\tau$ を消去して

(3.5)　$$\frac{\dot{f}}{f} - \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{f}_K}{f_K}$$

が得られる。(3.4)と(3.5)より $(d/dt)(K/f)$ は次のように定数 τ となる：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{f}\right) = \frac{\dot{K}f - \dot{f}K}{f^2} = -\frac{K}{f}\left(\frac{\dot{f}}{f} - \frac{\dot{K}}{K}\right)$$
$$= -\frac{K}{f}\cdot\frac{\dot{f}_K}{f_K} = \tau$$

この式の積分 $K/f = K^{\tau}\Phi^{-1} = \tau t + A_0$ ($K_0 = K(0)$, $R_0 = R(0)$, $f_0 = f(K_0, R_0)$，$A_0 = K_0/f_0$：通常 $A_0 \geq 0$ である)，即ち

(3.6)　$$K^{-\tau}\Phi = \frac{1}{\tau t + A_0}$$

を，ここでは次の形となる(2.3)の拘束条件に代入する：

(3.7)　$$\dot{K} = K^{1-\tau}\Phi(R) + \rho K - ce^{\gamma t}$$

得られた式

(3.8)　$\dot{K}=\dfrac{K}{\tau t+A_0}+\rho K-ce^{\gamma t}$

を $K=e^{\rho t}\Psi(t)$ により

$$\dot{\Psi}=\frac{\Psi}{\tau t+A_0}-ce^{(\gamma-\rho)t}$$

に変換する。これに，$\dot{\Psi}=\Psi/(\tau t+A_0)$ の解

$$\Psi=\Psi_0(\tau t+A_0)^{1/\tau}\quad(\Psi_0\text{: const.})$$

における定数 Ψ_0 を任意関数 $\Psi_0(t)$ に置きかえて代入すると $\dot{\Psi}_0=-ce^{(\gamma-\rho)t}(\tau t+A_0)^{-1/\tau}$ となる。その積分 $\Psi_0(t)$ が存在するとき次の再生産可能な資産 $K(t)$ の最適経路が得られる[22]：

(3.9)　$K(t)=ce^{\rho t}(\tau t+A_0)^{1/\tau}(A_1-\Gamma(t))$

ここに $A_1=(K_0/c)A_0^{1/\tau}=K_0^{1-1/\tau}f_0^{1/\tau}/c$（定数）で

$$\Gamma(t)=\int_0^t e^{(\gamma-\rho)s}(\tau s+A_0)^{-1/\tau}ds$$

である。

注意４．$\rho=\gamma$ のとき，$\Gamma(t)=((\tau t+A_0)^{1-1/\tau}-A_0^{1-1/\tau})/(\tau-1)$ である。$\rho\neq\gamma$ のとき，積分 $\Gamma(t)$ は $x=|\rho-\gamma|(s+A_0/\tau)$ により定数倍を除いて

$$\Gamma(t)=\int_{|\rho-\gamma|A_0/\tau}^{|\rho-\gamma|(t+A_0/\tau)} e^{\pm x}x^{-1/\tau}dx$$

に変換される。但し，複号 $\pm$ は $\gamma-\rho$ の符号と同順とする。$\rho-\gamma<0$ のとき，$t<\infty$ の場合は積分 $\Gamma(t)$ は存在し，$t=\infty$ の場合は発散する。$\rho-\gamma>0$ のとき，$\Gamma(t)$ の存在は次の事実から判断できる：積分

$$\Gamma(\varepsilon,t,p)=\int_\varepsilon^t e^{-x}x^{p-1}dx\ (0<\varepsilon<\infty)$$

について，$p>0$ のとき，$\Gamma(0,t,p)$ と $\Gamma(\varepsilon,\infty,p)$ は共に存在する。$\Gamma(0,\infty,p)$ はよく知られているガンマ関数である。

以後 $A_0>0$ のとき $\tau\neq 0,1$; $A_0=0$ のとき $\tau>1$（従って $-1/\tau>-1$）とする。このとき $\Gamma(t)$ が存在する。更に $\Phi(R)=(R^1)^{\tau_1}\cdots(R^n)^{\tau_n}(\tau=\tau_1+\cdots+\tau_n)$ とおいて $f(R,K)=K^{1-\tau}\Phi(R)$ をコブ-ダグラス生産関数

(3.10)　$f(R,K)=K^{1-\tau}(R^1)^{\tau_1}\cdots(R^n)^{\tau_n}$

とすると，(2.6)は

$$\frac{\tau_i}{\tau_1}\cdot\frac{f_{R^1}}{f_{R^i}}=\frac{R^i}{R^1}\equiv\kappa_i\quad(\kappa_i\text{: const., }\kappa_1=1)$$

となり，$R^i=\kappa_iR^1$ である。これを $\Phi(R)=(R^1)^{\tau_1}\cdots(R^n)^{\tau_n}$ に代入した Φ を用いて，(3.6)より

$$R^1(t)=(\kappa_2^{\tau_2}\cdots\kappa_n^{\tau_n})^{-1/\tau}(\tau t+A_0)^{-1/\tau}K$$

が定まり，従って

$$\begin{aligned}R^i(t)&=\kappa_iR^1\\&=c\kappa_i(\kappa_2^{\tau_2}\cdots\kappa_n^{\tau_n})^{-1/\tau}e^{\rho t}(A_1-\Gamma(t))\end{aligned}$$

となる。ここに $\kappa_i(\kappa_2^{\tau_2}\cdots\kappa_n^{\tau_n})^{-1/\tau}=R^i(R^1)^{-\tau_1/\tau}\cdots\times(R^n)^{-\tau_n/\tau}$ は定数であるから，特に

(3.11)　$\kappa_i(\kappa_2^{\tau_2}\cdots\kappa_n^{\tau_n})^{-1/\tau}$
$\qquad=R_0^i(R_0^1)^{-\tau_1/\tau}\cdots(R_0^n)^{-\tau_n/\tau}$

である。又 $R_0^i=R^i(0)=c\kappa_i(\kappa_2^{\tau_2}\cdots\kappa_n^{\tau_n})^{-1/\tau}A_1$ であるから枯渇性資源 $R^i(t)$ の最適経路は次の形となる：

(3.12)　$R^i(t)=R_0^ie^{\rho t}\times$
$\qquad(1-c(R_0^1)^{-\tau_1/\tau}\cdots(R_0^n)^{-\tau_n/\tau}\Gamma(t))$

更に(3.12)を(2.4)に代入して積分すると次のストック $S^i(t)$ の最適経路が得られる ($S_0^i=S^i(0)$):

(3.13)　$S^i(t)=-\displaystyle\int_0^t R_0^i\times$
$\qquad\Big((1-c(R_0^1)^{-\tau_1/\tau}\cdots(R_0^n)^{-\tau_n/\tau}\Gamma(s)\Big)ds+S_0^i$

$T=\infty$ のときは $\rho-\gamma>0$ として，消費 $ce^{\gamma t}$ における定数 c と初期値 R_0^i $(i=1,\cdots,n)$ が横断性の条件[23)]

(3.14)　$$\lim_{t\to\infty}(\pi(t)K(t)+\lambda_i S^i(t))=0$$

を満たすように定めることができる。実際，(3.6)は $f_K=(1-\tau)f/K=(1-\tau)(\tau t+A_0)^{-1}$ となり，(2.5a)はここでは

$$\frac{\dot\pi}{\pi}+\frac{1-\tau}{\tau t+A_0}=-\rho$$

となる。その積分

$$\pi=\pi_0 e^{-\rho t}(\tau t+A_0)^{1-1/\tau}\qquad(\pi_0\text{: const.})$$

と(3.9)の K との積 πK は定数倍を除いて $(\tau t+A_0)(A_1-\Gamma(t))$ となる。$A_1=\lim_{t\to\infty}\Gamma(t)$ とおくと，$\lim_{t\to\infty}(\tau t+A_0)^{-1}$ と $\lim_{t\to\infty}(A_1-\Gamma(t))$ は共に零に収束するので

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}(\tau t+A_0)(A_1-\Gamma(t))&=\lim_{t\to\infty}\frac{A_1-\Gamma(t)}{(\tau t+A_0)^{-1}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot\Gamma(t)}{\tau(\tau t+A_0)^{-2}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(\tau t+A_0)^{2-1/\tau}}{\tau e^{(\rho-\gamma)t}}=0\end{aligned}$$

即ち $\lim_{t\to\infty}\pi(t)K(t)=0$ となる。従って $R_0^i=R^i(0)=c\kappa_i(\kappa_2^{\tau_2}\cdots\kappa_n^{\tau_n})^{-1/\tau}A_1$ と(3.11)より

$$cA_1=K_0^{1-1/\tau}f_0^{1/\tau}=(R_0^1)^{\tau_1/\tau}\cdots(R_0^n)^{\tau_n/\tau}$$

となるので，c と $R_0^i\,(i=1,\cdots,n)$ が

(3.15)　$$c\lim_{t\to\infty}\Gamma(t)=(R_0^1)^{\tau_1/\tau}\cdots(R_0^n)^{\tau_n/\tau}$$

を満たせば $\lim_{t\to\infty}\pi(t)K(t)=0$ となる。同様に，$\alpha>1$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}t^\alpha(A_1-\Gamma(t))&=\lim_{t\to\infty}\frac{A_1-\Gamma(t)}{t^{-\alpha}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot\Gamma(t)}{\alpha t^{-\alpha-1}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha t^{\alpha+1}}{\alpha e^{(\rho-\gamma)t}(\tau t+A_0)^{1/\tau}}=0\end{aligned}$$

より

$$\int_0^\infty(A_1-\Gamma(t))dt$$

が存在することから次の積分も存在する：

$$\begin{aligned}S_0^i&=-\int_0^\infty c\kappa_i(\kappa_2^{\tau_2}\cdots\kappa_n^{\tau_n})^{-1/\tau}(A_1-\Gamma(t))dt\\&=-\int_0^\infty R_0^i\left(1-c(R_0^1)^{-\tau_1/\tau}\cdots(R_0^n)^{-\tau_n/\tau}\Gamma(\mathrm{s})\right)ds\end{aligned}$$

従って(3.13)の $S^i(t)$ は $\lim_{t\to\infty}\lambda_i S^i(t)=\lambda_i\lim_{t\to\infty}S^i(t)=0$ $(\lambda_i=\text{const.})$ を満たす。

定理5．拘束条件(3.7)と(2.4)の下での積分(2.2)の最小化問題において，(3.7)における $\Phi(R)$ を τ 次の同次関数とする。$T<\infty$ の場合，$A_0>0$ のとき $\tau\neq0,1$; $A_0=0$ のとき $\tau>1$ とする。このとき，再生産可能な資産の最適経路(3.9)が定まる。更に(3.7)における関数 $f(R,K)=K^{1-\tau}\Phi(K)$ を(3.10)のコブ-ダグラス生産関数とすると，枯渇性資源とそのストックの最適経路(3.12)と(3.13)がそれぞれ定まる。$T=\infty$ の場合，$\tau>1$ とする。このとき，消費 $ce^{\gamma t}$ における定数 γ が $\rho-\gamma>0$ を満たし，定数 c と初期値 R_0^i $(i=1,\cdots,n)$ が(3.15)を満たすように定めれば再生産可能な資産とそのストックの最適経路(3.12)と(3.13)は横断性の条件(3.14)を満たす。

注意5．単一の枯渇性資源，即ち $\Phi(R)=R^\tau$ のとき，(3.6)より $R=(\tau A+A_0)^{-1/\tau}K$ となり，枯渇性資源とそのストックの最適経路はそれぞれ次のようになる[24)]：

$$R(t) = e^{\rho t}(R_0 - c\Gamma(t))$$

$$S(t) = -\int_0^t (R_0 - c\Gamma(s))ds + S_0$$

これらはそれぞれ(3. 12)と(3. 13)において $i = 1$, $R_0^1 = R_0$, $S_0^1 = S_0$, $\tau_1 = \tau$ とした式である。これらが $T = \infty$ のときの横断性の条件(3. 14)を満たすようにするには，消費 $ce^{\gamma t}$ における定数 γ が $\rho - \gamma > 0$ を満たし，定数 c と初期値 R_0 が(3. 15)に対応する $c \lim_{t\to\infty} \Gamma(t) = R_0$ を満たすように定めればよい。

注

1) P. A. Samuelson, Law of conservation of the capital-output ratio, *Proc. Nat. Acad. Sci., Appl. Math. Sci.* **67** (1970), pp. 1477–1479.
2) T. Nôno, A classification of neutral technical changes: An application of Lie theory, II, III, *Bull. Fukuoka Univ. Ed.*, **III 20** (1970), 47–62; **21** (1971), 43–56; **22** (1972), pp. 67–81.
3) S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen I; II; III, Teubner, Leipzig (1888); (1890); (1893). Reprinted by Chelsea, New York (1970).
4) E. Noether, Invariante Variations Probleme, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Cl. II* **1918** (1918), pp. 235–257.
5) E. Bessel-Hagen: Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik., *Math. Ann.* **84** (1921), pp. 258–276.
6) G. Caviglia, Composite variational principles, added variables, and constant of motion, *Internat. Theoret. Phys.* **25** (1986), pp. 139–146.
7) G. Caviglia, Composite variational principles and determination of conservation laws. *J. Math. Phys.* **29** (1988), pp. 812–816.
8) F. Mimura and T. Nôno, A method for deriving new conservation laws, *Bull. Kyushyu Inst. Tech. Math. Natur. Sci.* **42** (1995), pp. 1–17.
9) 三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその新古典派的経済成長理論への応用，広島経済大学経済論集 第33巻第2号（2010年9月），pp. 17–27.
10) Reference 8), Theorem 6.
11) F. Mimura, F. Fujiwara and T. Nôno, New derivation of conservation laws for optimal-economic growths, *Tensor, N. S.* **58** (1997), pp. 195–207.
12) F. Mimura, F. Fujiwara and T. Nôno, New derivation of conservation laws for optimal control problem and its application to economic growth models, *Grobal competition and integration*, Kluwer Academic Publishers, Boston (1999), pp. 241–266.
13) Reference 11), Theorem 2; Reference 12), Theorem 2.
14) J. M. Hartwick, Intergenerational equity and the investing of rents from exhaustible resources, *American Economic Review* **66** (1977), 972–974.
15) J. M. Hartwick, Substitution among exhaustible resources and intergenerational equity, *Review of Economic Studies* **45** (1978), 347–354.
16) R. M. Solow, Intergenerational equity and exhaustible resources, *Review of Economic Studies*, (*Symposium*, 1974), 29–45.
17) H. Hotelling, The economics of exhaustible resources, *Journal of Political Economy* **39** (1931), 137–135.
18) R. Sato and Y. Kim, Hartwick's rule and economic conservation laws, *J. Economic Dynamics and Control* **26** (2002), pp. 437–449.
19) F. Fujiwara, F. Mimura and T. Nôno, Intergenerational problem for exponential consumption growth, *Tensor, N. S.* **58** (1997), pp. 186–194.
20) F. Mimura, F. Fujiwara and T. Nôno, Conservation laws in a model for capital accumulation with many exhaustible resources, *Tensor, N. S.* **58** (1997), pp. 171–185.
21) Reference 15), Eq.(16), while in which $A^i = 0$.
22) Here, the constant A_1 in the appearance of $K(t)$ in Reference 12) is replaced with $-A_1$.
23) A. Takayama, Mathematical economics, Dryden Press, Hinsdale, Illinois (1974); Cambridge University Press, New York (1985).
24) Reference 19), Section 2.