広島経済大学経済研究論集
第31巻第４号　2009年３月

広島経済大学経済学会
2008年度　第６回研究集会〔2008年10月30日（木）〕報告要旨

計量ファイナンスのいくつかの話題
――Realized Volatility の長期記憶性と情報流入の関係――*

得　津　康　義**

1　は　じ　め　に

計量ファイナンスの重要なテーマの一つに，ボラティリティの推定がある。従来はボラティリティ・モデルを想定し，日次データを用いてそれらのモデルを推定することでボラティリティの推定としてきた。近年では情報処理技術の急速な発達により，高頻度データと呼ばれるレコード間隔が非常に短いデータを利用し，モデルフリーでボラティリティの推定が行われている。しかし，モデルを想定して推定を行った場合も，モデルフリーで推定を行った場合でも，金融時系列データのボラティリティには持続性が観察される。そこでボラティリティの持続性の原因について，一つの考察を報告する。

2　Realized Volatility

これまでにも ARCH 型や SV 型に代表されるようなボラティリティ推定の研究は数多く存在している。しかし，それらはモデルを想定するために，モデルごとに推定値が変わるという問題があった。そこでモデルに依存しないボラティリティの推定量が必要になってくる。その代表的な手法の一つに高頻度データから計算される Realized Volatility（RV）がある。いま，日中に n 個の収益率データ$\{r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n},\cdots,r_t\}$があるとき，第 t 日の RV である RV_t は以下の式で定義される。

$$RV_t = \sum_{i=1}^{n} r^2{}_{t-1+i/n}$$

* 本研究は，文部科学省科学研究費補助金「高頻度データによる株価・為替レートの計量ファイナンス分析」および広島経済大学共同研究助成金の助成を受けている。

** 広島経済大学経済学部講師

もし，資産価格の対数値 $\ln P(\mathrm{s})$ が拡散過程に従っていると仮定した場合，

$$d\ln P(\mathrm{s})=\mu(s)ds+\sigma(s)dW(s)$$

第 t 日の真のボラティリティは以下のように定義され，

$$\sigma_t^2=\int_{t-1}^{t}\sigma(s)^2ds$$

RV_t は σ_t^2 の一致推定量となる。

$$\mathrm{plim}RV_t=\sigma_t^2$$

実際のデータを利用して計算された RV の時系列は長期記憶過程に従っていることがよく知られており，そのプロセスには ARFIMA モデルがしばしば用いられる。ARFIMA (p, d, q) は以下の式で定義される。

$$\phi(\mathrm{L})(1-L)^d x_t=\theta(L)u_t,\quad u_t\sim WN(0,\sigma^2)$$

$WN(0,\sigma^2)$ は平均 0，分散 σ^2 のホワイトノイズ，$\phi(\mathrm{L})$ と $\theta(L)$ はラグオペレータ L を用いたラグ多項式である。もし $0<d<0.5$ ならば，定常な長期記憶過程であり，d＝1 ならば ARIMA (p, q) となる。さらに $d=0$ であれば ARMA (p, q) である。d の値によって長期記憶性の程度を表すことになる。実際のデータから推定された $\hat{\alpha}$ は長期記憶性が強い結果がよく観察される。RV が長期記憶過程に従っている原因としては，短期記憶のボラティリティの Mixture，構造変化，想定誤差などが考えられる。本報告は特に想定誤差に関して考察である。

3　情報流入仮説と長期記憶性

以下では，情報流入仮説に基づき RV の長期記憶性の原因を考えている。情報流入仮説では，収益率は情報が市場に到着したときに付く均衡価格の収益率の合計であり，情報流入の数はランダムである。もし情報流入量が相関しているのなら，ボラティリティに相関が生じることになるとしている。(1)

$$R_t=\sum_{i=1}^{n_t}x_i\qquad x_i\sim i.i.d.N.(0,\sigma^2)$$

x_i は日中均衡収益率，n_t は t 日の情報流入回数である。

$$R_t=\sigma\sqrt{n_t}Z_t\qquad Z_t\sim i.i.d.N.(0,1)$$

$$R_t|n_t \sim N(0, n_t\sigma^2)$$

ここで，$Z_t \sim i.i.d.$ なので，ボラティリティの自己共分散は以下の式になる。

$$\begin{aligned} Cov(R_t^2, R_{t-j}^2) &= \sigma^4 Cov(n_t Z_t^2, n_{t-j} Z_{t-j}^2) \\ &= \sigma^4 Cov(n_t, n_{t-j}) \end{aligned}$$

すなわち，ボラティリティの長期記憶性は情報流入回数が長期記憶しているために生じているのであり，明示的に情報流入回数を説明変数に加えることにより見せかけの長期記憶性の程度が減少するということである。

4　実証分析

実証分析として，2007年１月４日から2007年12月28日の東京証券取引所１部上場の1350銘柄について行った。渡部・佐々木 (2006) では ARFIMA モデルに追加的に外性変数を入れた ARFIMAX モデルの提案を行っており，情報流入回数を説明変数に入れた ARFIMAX モデルは以下の式で表される。

$$(1-L)^d(\ln RV_t - \mu - \alpha N_t) = u_t, \quad u_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

表１は ARFIMA モデル，ARFIMAX モデルにおける d の推定値の要約である。

当然，個々の銘柄では推定された $\hat{\alpha}$ が増加する場合もあるが，市場全体での動向をみるために両モデルにおける d の推定値の平均は同じであるという仮説のもとで検定を行った。表２から分かるように d の推定値の平均は同じであるという仮説は有意水準５％で棄却することができる。

表１　d の推定値

	ARFIMA	ARFIMAX	d の推定値	ARFIMA	ARFIMAX
平均	0.337	0.313	0	0	0
標準誤差	0.002	0.001	0.05	0	0
メジアン	0.335	0.311	0.1	0	1
モード	0.338	0.286	0.15	1	1
標準偏差	0.063	0.054	0.2	16	28
分散	0.004	0.003	0.25	88	126
尖度	0.309	0.747	0.3	260	383
歪度	0.218	0.076	0.35	451	499
範囲	0.442	0.439	0.4	327	244
最小	0.135	0.093	0.45	147	55
最大	0.577	0.532	0.5	48	10
合計	454.826	421.982	0.55	11	3
標本数	1350	1350	0.6	1	0

表 2　d の推定値の平均に対する検定

	ARFIMA	ARFIMAX
平均	0.337	0.313
分散	0.004	0.003
観測数	1350	1350
仮説平均との差異	0	
自由度	2634	
t	10.822	
P(Ti=t)片側	0.000	
t 境界値片側	1.645	
P(Ti=t)両側	0.000	
t境界値両側	1.961	

5　お　わ　り　に

本報告は，金融時系列データに観測されるボラティリティの長期記憶性は，含められるべき説明変数の欠落によって生じていると考え，情報流入仮説，および ARFIMAX モデルを利用し検証を行った。検証の結果，市場全体の傾向としては概ね良好な結果を得られた。今後の研究課題としては，他に追加すべき変数の決定，予測精度の検証，さらに誤差項の特性の検証がある。

注

⑴　Omran and Mckenzie(2000)

参　考　文　献

Beran, Jan(1995) ”Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models,” Journal of the Royal Statistical Society, B57, 659-672.

M. F. Omran and E. Mckenzie (2000) ”Heteroscedasticity in stock returns data revisited: volume versus GARCH effects,” Applied Financial Economics, 10,553-560.

田中勝人(2006)『現代時系列分析』岩波書店.

渡部敏明・佐々木浩二(2006)「ARCH 型モデルと”Realized Volatility”によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」『金融研究』第25 巻別冊第 2 号，39-74.

渡部敏明(2007)「Realized Volatility -サーベイと日本の株式市場への応用-」『経済研究』，Vol.58，No 4，352-373.