広島経済大学経済研究論集
第29巻第2・3号 2006年12月

広島経済大学経済学会
2006年度　第4回研究集会〔2006年9月21日（木)〕報告要旨

ポートフォリオの理論と実践

得　津　康　義*

1　は じ め に

現代ファイナンス理論の重要なテーマの一つに，ポートフォリオセレクションがある。これは N 種類の資産が市場に存在する場合，どのような組み合わせで資産を購入するかについての数学的モデルである。このモデルでは完全市場を仮定し，ある一定の期待収益率の下でポートフォリオのリスクが最小になる投資比率を計算する。しかし，現実の市場は完全市場とは言えず様々な摩擦が存在する。また，実際に投資を行う場合ではリスクの最小化よりもリターンの最大化を重要視することもある。本研究集会ではポートフォリオ理論の簡単な解説と筆者が係わった広島大学と広島銀行の産学連携プロジェクトの概要を報告した。[(1)]

2　ポートフォリオセレクション

ポートフォリオとは，様々な資産を組み合わせて投資することにより，保有する資産全体のリスクを減少させる方法である。次のような場合を考えてみる。市場に2種類の資産（AとB）しかなく，今後の見通しとして二つの状況（状況1，状況2）が考えられるとする。それぞれの状況における各資産の収益率を以下の表に示す。

表1　各資産のリスクとリターン

	状況1	状況2
資産A	μ_{A1}	μ_{A2}
資産B	μ_{B1}	μ_{B2}

* 広島経済大学経済学部講師

ここで，それぞれの状況が確率1/2で起こるとすれば，各資産の平均（μ_A，μ_B）と標準偏差（σ_A，σ_B）は以下のように計算される。資産投資のリターンとリスクは，平均と標準偏差で表すことになる。

$$\mu_A=\frac{1}{2}(\mu_{A1}+\mu_{A2}) \tag{1}$$

$$\mu_B=\frac{1}{2}(\mu_{B1}+\mu_{B2}) \tag{2}$$

$$\sigma_A=\sqrt{\frac{1}{2}\{(\mu_{A1}-\mu_A)^2+(\mu_{A2}-\mu_A)^2\}} \tag{3}$$

$$\sigma_B=\sqrt{\frac{1}{2}\{(\mu_{B1}-\mu_B)^2+(\mu_{B2}-\mu_B)^2\}} \tag{4}$$

もし，投資家が資産Aのみ投資した場合，そのリスクは σ_A になる。しかし，投資家が保有資金を ω の比率で資産Aに投資し，$1-\omega$ の比率で資産Bに投資するポートフォリオ戦略を採用したならば，保有する資産全体のリターン（μ_p）とリスク（σ_p）は以下のように計算される。

$$\mu_p=\omega\mu_A+(1-\omega)\mu_B \tag{5}$$

$$\sigma_p=\sqrt{\omega^2\sigma_A^2+(1-\omega)^2\sigma_B^2+2\omega(1-\omega)\rho\sigma_A\sigma_B} \tag{6}$$

ここで ρ は資産Aと資産Bの相関係数である。

投資比率 ω を決めることにより，ポートフォリオのリスクとリターンは決まる。リスクとリターンの組み合わせは無数に考えられ，それらの組み合わせをプロットしたものが図1である。図1の直線 AF および曲線 AZ は効率的フロンティアと呼ばる。これらの集合上では，あるリターンの下でリスクが最小である資産の組み合わせを示している。図1から明らかなように，この効率的フロンティアは資産間の相関によってその形状が異なる。もし，二つの資産の相関係数が－1であれば，投資比率 ω 次第で無リスクでリターンを得ることが可能である（点 F）。ここでの目標は，あるリターンの下でリスクを最小化するような投資比率 ω を見るけることである。

以上の議論は資産の数が N に増えたときでも同様である。N 資産の場合の目的関数と制約は以下に示す通りであり，この最適化問題を解くことになる。

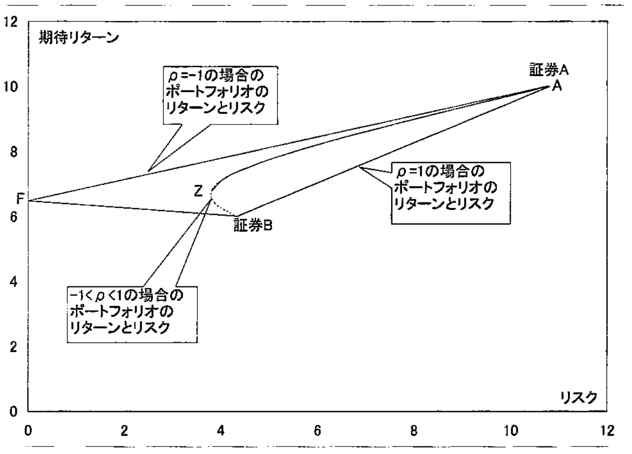

図1　効率的フロンティア

$$\underset{\omega}{Min} \quad \omega_n' \sum \omega_n \tag{7}$$

$$\omega_n' \mu = r_p \tag{8}$$

$$\omega_n' \iota = 1 \tag{9}$$

$$0 \leq \omega_n' \leq 1 \tag{10}$$

ここで ω_n は各資産の投資比率，$\sum$ は共分散行列，ι は全ての要素が1のベクトルである。(7)式で目標であるリスク最小化，(8)式から(10)式が制約を表している。

投資家にとっての最適ポートフォリオは，投資家のリスク回避度によって異なる。仮に何らかのベンチマークを用いるならば，最適ポートフォリオのリターン r_p は，そのベンチマークの期待リターンと一致する点である。

以上はポートフォリオセレクションの一般的な議論である。実際に投資を行うときには，リスクの最小化よりもむしろリターンの最大化を目指すこともあり得る。この場合の投資家の目標は，あるリスクの下でリターンを最大化するように ω を決定することになる。両者の違いを図2で示す。

いま，ベンチマークの期待リターンとリスクが与えられたとする（図2の点B)。リスクを最小化した最適ポートフォリオの期待リターンとリスクは点Xとなる。一方，リターンを最大化した最適ポートフォリオの期待リターンとリスクは点Yである。

目標をリターン最大化するポートフォリオの組成とし，市場に N 資産が存在した場合の目的関数と制約を以下に示す。

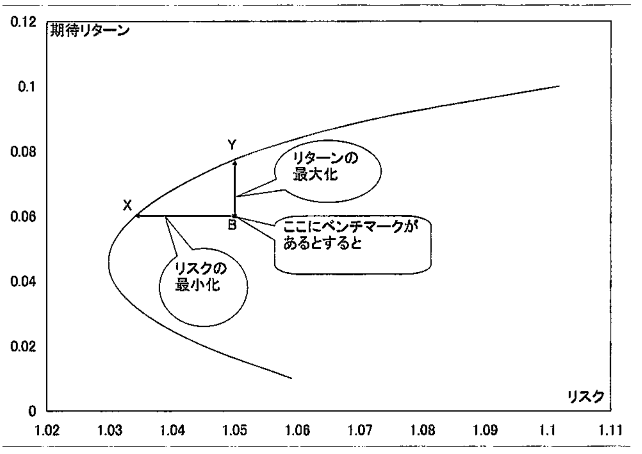

図2　リスクの最小化とリターンの最大化

$$\underset{\omega}{Max} \quad \omega'_n \mu \tag{11}$$

$$\omega'_n \sum \omega_n = \sigma_B \tag{12}$$

$$\omega'_n \iota = 1 \tag{13}$$

$$0 \leq \omega'_n \leq 1 \tag{14}$$

ここで(11)式で目標であるリターンの最大化，(12)式から(14)式が制約を表している。リターンの最大化では，目的関数が線形で，非線形制約（(12)式）を含む最適化問題を解くことになる。

3　実証分析

本節では，ベンチマークを日経225平均株価指数としリスク最小化問題とリターン最大化問題の結果を示す。分析期間は2004年12月から2005年12月までの1年間の日次収益率を用いている。手順として，始めに東京証券取引所1部上場銘柄の収益率と日経225平均株価指数の収益率の相関係数を計算し，相関の高い150銘柄，低い150銘柄の合計300銘柄を抽出し最適計算を行った。これはお互い異なる相関の銘柄を組み合わせることにより，ポートフォリオ全体のリスクを下げようとする試みである。

リスク最小化を目標とした場合のベンチマークと組成したポートフォリオのそれぞれのリスクを比較したグラフが図3である。

図3からベンチマークと比較して，組成したポートフォリオのリスクは小さいことがわかる。

次にリターンの最大化を目標とした場合のベンチマークと組成したポートフォリ

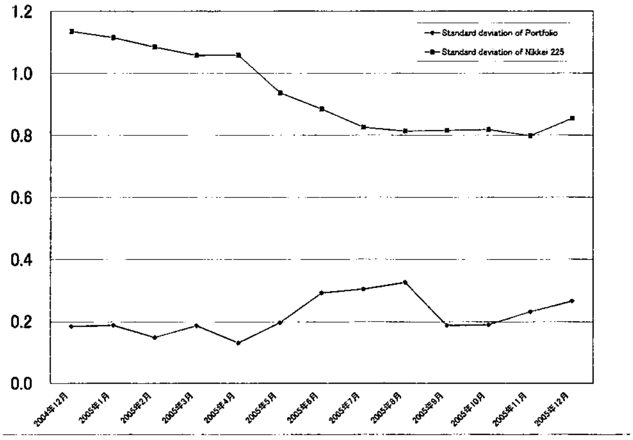

図3　リスクの推移

オのそれぞれのリターンを比較したグラフが図4である。

図4より，リターンを最大化した場合，組成したポートフォリオはベンチマークのリターンを上回ることが出来る。

しかし，この結果にはいくつかの問題点がある。

- 日次データを用いて計算をすると言うことは，毎日ポートフォリオを組み替えなければならない。
- 投資銘柄数が300銘柄と言うのは非現実的である。
- 過去のデータで最適化された結果を用いて，次期に投資を行ったとしても最

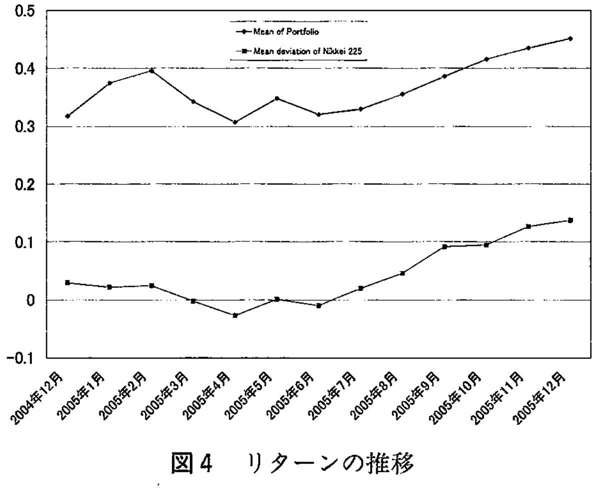

図4　リターンの推移

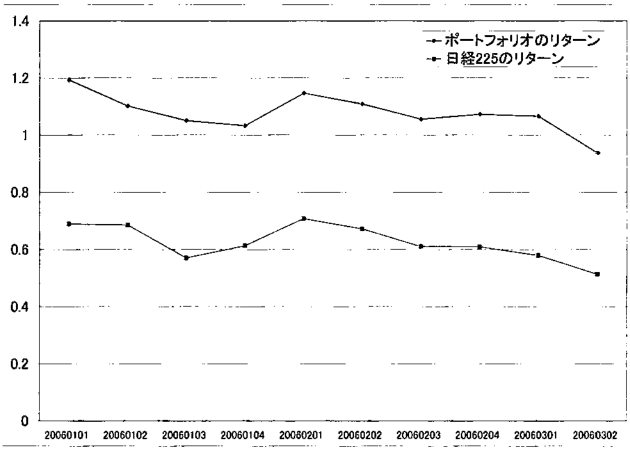

図5　リターンの推移

良のパフォーマンスを得れるとは限らない。

以上の点から現実に投資を行うのであれば，モデルの修正が必要となる。そこで以下に示すようにモデルの修正を行った。

1．データは週次を用いる。
2．投資銘柄数は100銘柄とする。
3．ベンチマークである日経225平均株価指数に関しては先物をショートポジションする。

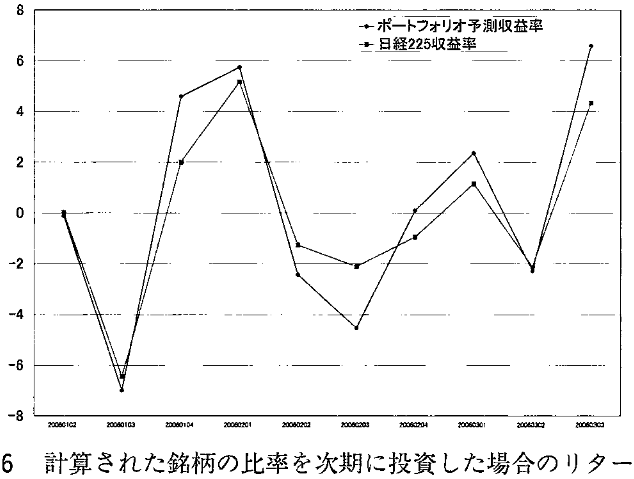

図6　計算された銘柄の比率を次期に投資した場合のリターン

表２ リターンの推移表

	ポートフォリオ予測収益率	日経225収益率
20060102	－0.106	0.013
20060103	－6.992	－6.452
20060104	4.586	1.999
20060201	5.748	5.162
20060202	－2.429	－1.267
20060203	－4.535	－2.111
20060204	0.090	－0.953
20060301	2.360	1.151
20060302	－2.287	－2.133
20060303	6.585	4.330
合計	3.020	－0.260

３．により，ポートフォリオのリスクをさらに減少させることが期待できる。また，検証に際しては，推定期間と予測期間を分け，推定期間で計算された比率で予測期間に投資した場合のリターンを計測することにした。モデルの修正を行い，リターン最大化を目標にした場合の結果が図５である。

さらに最適投資比率で次期に投資した場合の結果を図６と表２である。

表２より，分析期間における日経225の収益率は－0.260％であるのに対し，組成したポートフォリオの収益率は3.020％であることから，モデルの修正を行った後ではパフォーマンスの高いポートフォリオの組成が可能であることが分かる。

2 おわりに

本稿は筆者が関わった産学連携プロジェクトの研究成果について研究集会での報告の一部をまとめた報告書である。このプロジェクトを通じ，アカデミックな研究が実務でどのように生かすことが出来るかについて学ぶことが出来た。その成果に関しては平成18年６月15日に記者会見をし，翌日の16日の各種の新聞に掲載されている。さらなるモデルの改良は必要と感じており，それらに関しては今後の課題としたい。また，このプロジェクトを通じて得た様々なことをいかにして教育に反映させるかも課題である。

最後に，このようなプロジェクトに参加する機会を与えてくださった広島大学の前川功一教授ならびに参加を認めていただいた本学の石田恒夫学長に感謝したい。

注

(1) 本報告ならびに本稿で述べた見解は筆者のものであり，広島大学，広島銀行および筆者が所属している広島経済大学の見解ではないことをここに断っておきたい。

参 考 文 献

J. Y Campbell, A. W. Lo and A. C. Mackinlay(1997) *The Econometrics of Financial Markets* Princeton University Press, Prinston, New Jersey.

E., Fama(1970)"Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work," *Jornal of Financial*, 25, 383-417.

刈屋武明（1990）『ポートフォリオ計量分析の基礎』東洋経済新報社.

刈屋武明・佃良彦編（1991）『金融・証券の数量分析入門』東洋経済新報社.

大前恵一郎訳（2001）『現代ファイナンス論　改訂版』ピアソン・エデュケーション.